Projektarbeit

Eine vollständige Charakterisierung aller zweideutigen Wörter in $L(X\ \mathtt{ab}\ X\ \mathtt{bca}\ Y\ \mathtt{abc}\ Y)$

Dominik D. Freydenberger

14. Oktober 2005

AG Algorithmisches Lernen - Prof. Dr. R. Wiehagen
Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Informatik

Betreuer: Daniel Reidenbach

Zusammenfassung

In der hier vorliegenden Arbeit werden alle Wörter aus der vom Pattern Mau $= X\, \texttt{ab}\, X\, \texttt{bca}\, Y\, \texttt{abc}\, Y$ erzeugten Patternsprache, die in Bezug auf Mau zweideutig sind, charakterisiert. Zu diesem Zweck entwickeln wir ein gewisses Sortiment an Werkzeugen zum Lösen von Wortgleichungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Zu Beginn

Bekanntermaßen nehmen formale Sprachen und ihre Anwendung in der Informatik eine Rolle von zentraler Bedeutung ein. Neben Grammatiken und Automaten, den wohl gebräuchlichsten Formen eine Sprache zu definieren, lassen sich Sprachen auch durch Angeben eines Musters, das in allen Wörtern der Sprache vorkommt, definieren. Dieser Ansatz wird mit den sogenannten *Patternsprachen* verfolgt, die zuerst in [Ang80a] vorgestellt wurden.

Ein Pattern ist ein Wort aus Variablen und Terminalen und erzeugt eine Sprache, indem alle Variablen durch beliebige Worte über einem gegebenen Alphabet ersetzt werden. Mehrfache Vorkommen der gleichen Variable werden dabei natürlich auf die gleiche Art ersetzt, so dass aus dem Pattern ein gänzlich aus Terminalen bestehendes Wort entsteht. Die Menge aller aus einem Pattern erzeugbaren Wörter stellt die von diesem Pattern generierte Sprache dar; so erzeugt zum Beispiel das Pattern XX die Menge aller quadratischen Wörter. Eine reichlich aktuelle Übersicht über dieses Gebiet findet sich in [Sal04]. Neben Anwendungen in der Induktiven Inferenz (siehe dazu zum Beispiel [Ang80b], [Shi82], [LW91] und [Rei04b]) lassen sich Patternsprachen unter anderem zur Formulierung des Postschen Korrespondenzproblems verwenden (siehe dazu beispielsweise [HK97] und [LP95]).

Aus manchen Pattern können gewisse Wörter durch mehr als nur eine Variablensubstitution erzeugt werden; seit [MS94] ist bekannt, dass Pattern existieren, bei denen die Zahl der Substitutionen, die ein und dasselbe Wort erzeugen, über alle Wörter gesehen beschränkt ist. Dadurch lässt sich zu jedem Pattern ein *Grad der Mehrdeutigkeit* zuordnen. Bisher sind Pattern mit Mehrdeutigkeitsgrad $2^m 3^n$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ bekannt; die Existenz von Pattern mit anderen Mehrdeutigkeitsgraden ist ein offenes Problem. In [MS94] wird unter anderem das Pattern

$$\mathrm{Mau} = X\,\mathtt{ab}\,X\,\mathtt{bca}\,Y\,\mathtt{abc}\,Y$$

als Beispiel für zweideutige Pattern genannt. Ein Beispiel für ein zweideutiges Wort aus der von Mau erzeugten Sprache ist

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\mathtt{cabca}}^{X}\mathtt{ab}\overbrace{\mathtt{cabca}}^{X}\mathtt{bca}\overbrace{\mathtt{abcbcabc}}^{Y}\mathtt{abc}\overbrace{\mathtt{abcbcabc}}^{Y}.\\
&\underbrace{\mathtt{cabcaabc}}_{X}\mathtt{ab}\underbrace{\mathtt{cabcaabc}}_{X}\mathtt{bca}\underbrace{\mathtt{bcabc}}_{Y}\mathtt{abc}\underbrace{\mathtt{bcabc}}_{Y}
\end{aligned}$$

Allerdings sind nicht alle Wörter aus der Sprache eines Patterns mit endlicher Mehrdeutigkeit mehrdeutig; zum Beispiel ist

$$\underbrace{\mathtt{ababa}}_{X}\mathtt{ab}\underbrace{\mathtt{ababa}}_{X}\mathtt{bca}\underbrace{\mathtt{bababa}}_{Y}\mathtt{abc}\underbrace{\mathtt{bababa}}_{Y}$$

nur durch eine einzige Substitution erzeugbar und damit eindeutig auf Mau. Ziel dieser Arbeit ist es, alle zweideutigen Wörter in der von Mau erzeugten Sprache zu charakterisieren.

Im hier vorgestellten Ansatz wird diese Aufgabenstellung als Problem aus dem Bereich der Wortgleichungen aufgefasst – offensichtlich gilt es lediglich, sämtliche Wörter x_1, y_1, x_2, y_2 zu finden, für die

$$x_1 \, \mathtt{ab} \, x_1 \, \mathtt{bca} \, y_1 \, \mathtt{abc} \, y_1 = x_2 \, \mathtt{ab} \, x_2 \, \mathtt{bca} \, y_2 \, \mathtt{abc} \, y_2$$

und $x_1 \neq x_2$ sowie $y_1 \neq y_2$ gilt. An sich erscheint die Fragestellung einfach – tatsächlich ist seit [Mak77] bekannt, dass die Erfüllbarkeit von Wortgleichungen entscheidbar ist; allerdings beantwortet Makanins Algorithmus[1] diese Frage, ohne alle Lösungen zu finden oder näheren Aufschluss über die Struktur der Lösungen zu geben. In der Tat ist die Frage nach eben diesen Strukturen immer noch Gegenstand aktueller Forschung; siehe dazu zum Beispiel [KP03], [Pet04] und [Wei04]. Erschwert wird das ganze dadurch, dass Wortgleichungen mit Lösungen von hoher struktureller Komplexität existieren; bei vielen Gleichungen, nämlich den sogenanten nicht-parametrisierbaren Wortgleichungen, lassen sich die Lösungsmengen nicht anhand endlich vieler ‚einfacher' Ausdrücke beschreiben. Leider gilt dies auch für viele der hier vorkommenden Gleichungen.

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt: In Abschnitt 2 betrachten wir einige allgemeine wortkombinatorische Grundlagen und Resultate, definieren Patternsprachen und generalisieren diese zu parametrischen Patternsprachen. Abschnitt 3 befasst sich mit Wortgleichungen im parametrisierbaren (Abschnit 3.1) und nicht- parametrisierbaren (Abschnitt 3.2) Fall; diese Ergebnisse werden in Abschnitt 4 zum Hauptresultat verfeinert.

Neben der kanonischen Leseweise von vorne nach hinten bietet sich auch eine andere an. Leser, die anstelle von Geduld eine gewisse Vorbildung besitzen, überfliegen am besten ganz kurz den Abschnitt 2 ohne die Resultate dort mehr als nur am Rande zur Kenntnis zu nehmen, betrachten dann die Definitionen der Abschnitte 2.2 und 3, um schließlich in Abschnitt 4 das Hauptergebnis zu begutachten. Beim Lesen des zugehörigen Beweises empfiehlt es sich, die Resultate der vorherigen Abschnitte, insbesondere des Abschnittes 3, bei Bedarf nachzuschlagen.

Folgende Referenzen seien dem neugierigen Leser als Grundlagen ans Herz gelegt: Als Einführung in die und grundlegendes Werk der Wortkombinatorik führt kein Weg an [Lot83] vorbei, weiterhin lohnen sich als aktuellere und kompakte Übersichten [KB03], [Kar04] und [CK97]. In diesen Werken wird auch genauer auf den Themenkomplex der Wortgleichungen eingegangen. Näheres zu Patternsprachen findet sich nicht nur in dem bereits erwähnten [Sal04], sondern auch in [MS97].

[1] Makanins Algorithmus wird, nicht ohne Grund, als einer der komplizierteren Algorithmen bezeichnet. Nicht nur wegen seines Umfangs ist [Mak77] für einen ersten Einblick in diesen Algorithmus eher ungeeignet. Im Lauf der Jahre entstanden schrittweise verfeinerte Erklärungen, hier seien insbesondere [Sch92], [Gut98] und schließlich [Die02] genannt. Makanins Algorithmus ist übrigens nicht primitiv-rekursiv und von der Komplexität her in der Gegend von EXPSPACE einzuordnen; alleine deswegen lohnt es sich unter dem Gesichtspunkt der Allgemeinbildung, sich bei Gelegenheit näher mit ihm zu beschäftigen. Idealerweise liest man dazu gleich [Die02].

2 Grundlagen

$\mathbb{N}$ sei die Menge natürlichen Zahlen inklusive der 0, für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{N}_k$ die Menge aller natürlichen Zahlen ab (einschließlich) k. Ein *Alphabet* A ist eine abzählbare Menge mit mindestens zwei unterschiedlichen Elementen, diese bezeichnen wir als *Buchstaben*. Ein *Wort* über A ist eine endliche Folge von Buchstaben aus A, A^* bezeichne die Menge aller Wörter über A. Das Wort mit 0 Buchstaben bezeichnen wir als das *leere Wort* λ. Weiterhin sei A^+ definiert als $A^* \setminus \{\lambda\}$. Ist $w \in A^*$ ein Wort und $a \in A$ ein Buchstabe, so bezeichnet $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen von a in w. Die *Länge* eines Wortes $w \in A^*$ bezeichnen wir mit $|w|$.

Für zwei Wörter $u, v \in A^*$ ist die *Konkatenation* von u und v definiert durch uv. Ein Wort $u \in A^*$ ist *Faktor* eines Wortes $w \in A^*$, wenn $w_1, w_2 \in A^*$ existieren, so dass $w = w_1\, u\, w_2$. Für $n \in \mathbb{N}$, $w \in A^*$ bezeichne $(w)^n$ die n-fache Konkatenation von w, dabei gilt $(w)^0 = \lambda$ und $(w)^1 = w$. Sofern die Eindeutigkeit davon nicht berührt wird verzichten wir auch gelegentlich auf die Klammerung.

Teilmengen von A^* bezeichnen wir als *Sprachen*. Offensichtlich ist A^* (bzw. A^+) das von A erzeugte freie Monoid (bzw. die von A erzeugte freie Halbgruppe). Ist $B \subseteq A^*$ eine Sprache über A, so bezeichnet $B^* \subseteq A^*$ das von B erzeugte Monoid; analog gilt $B^+ = B^* \setminus \{\lambda\}$. Besitzt jedes Wort aus B^* eine eindeutige Faktorisierung aus Elementen von B, so ist B^* ein freies Monoid. Eine Sprache, die ein freies Monoid erzeugt, bezeichnen wir als *Code*.

Ist w ein Wort, so sei $w^* = \{w\}^*$ und $w^+ = w^* \setminus \{\lambda\}$. Ist $w \in A^*$ und $B \subseteq A^*$, so sei $wB = \{wu \mid u \in B\}$ und $Bw = \{uw \mid u \in B\}$.

Wir vereinbaren als Konvention: Das Alphabet Σ hat mindestens drei Buchstaben, nämlich $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$ und $\mathtt{c}$, auch wenn die meisten der Lemmata auch auf zweielementigen Alphabeten gelten. Feste Vorkommen von Elementen von Σ werden in Schreibmaschinenschrift gesetzt (zum Beispiel, wie bereits erwähnt, $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$, $\mathtt{c}$), im Gegensatz zu Buchstabenvariablen (zum Beispiel $a \in \Sigma$).

2.1 Wortkombinatorisches

Definition 2.1 *Sei $w \in \Sigma^+$. Dann ist die* Wurzel *$\rho(w)$ von w der kürzeste Faktor von w mit $\rho(w)^n = w$ für ein $n \in \mathbb{N}$. w ist* primitiv *wenn $n = 1$, ansonsten bezeichnen wir w als* imprimitiv.

$\rho(w)$ ist (natürlich) für alle w eindeutig bestimmt.

Definition 2.2 *Sei $w \in \Sigma^+$. Wir bezeichnen w als* periodisch, *wenn ein $u \in \Sigma^+$, ein $v \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}_1$ existieren, so dass $w = u(vu)^n$. Ansonsten ist w* unperiodisch.

Periodische Wörter lassen sich also auf nicht-triviale Weise in der Form $u(vu)^n$ darstellen und enthalten somit mindestens eine Wiederholung.

Proposition 2.1 *Sei $w \in \Sigma^+$. Ist w imprimitiv, so ist w periodisch.*

Beweis: (Trivial) Sei $w \in \Sigma^+$ imprimitiv. Dann existieren ein $w' \in \Sigma^+$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $w = (w')^{n+2}$. Daraus folgt unmittelbar $w = w'(w')^{n+1} = w'(\lambda w')^{n+1}$, w ist also periodisch. □

Der umgekehrt Fall dieser Beobachtung gilt natürlich nicht, zum Beispiel ist $\mathtt{abababa} = \mathtt{a}(\mathtt{ba})^3$ periodisch, aber primitiv. Wie sich im Verlauf dieser Arbeit zeigen wird, ist das Konzept der unperiodischen Wörter für die Lösung der von uns betrachteten Aufgaben indirekt von Bedeutung, dazu aber später mehr.

Definition 2.3 *Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^+$* kommutieren *genau dann, wenn $uv = vu$.*

In der Wortkombinatorik altbekannt und grundlegend ist die folgende Charakterisierung:

Lemma 2.2 ([Per83]) *Seien $u, v \in \Sigma^+$. $uv = vu$ gilt genau dann, wenn $\rho(u) = \rho(v)$.*

Nicht ganz so verbreitet, aber auch altbekannt sind die beiden folgenden Resultate:

Proposition 2.3 ([Per83]) *Seien $u, v \in \Sigma^+$, $m, n \in \mathbb{N}$. Aus $u^m = v^n$ folgt $\rho(u) = \rho(v)$.*

Proposition 2.4 ([Per83]) *Seien $u, v \in \Sigma^+$. $\{u, v\}$ ist genau dann ein Code, wenn $\rho(u) \neq \rho(v)$.*

Definition 2.4 *Sei $u \in \Sigma^+$. Dann gilt für alle $u_1 \in \Sigma^+$:*

1. *u_1 ist* Präfix *von u, genau dann, wenn $u = u_1 u_2$ für ein $u_2 \in \Sigma^*$,*
2. *u_1 ist* Suffix *von u, genau dann, wenn $u = u_2 u_1$ für ein $u_2 \in \Sigma^*$.*

$\mathrm{pref}(u)$ *bezeichne die Menge aller Präfixe von u,* $\mathrm{suff}(u)$ *die Menge aller Suffixe von u.* $\mathrm{pref}^\lambda(u)$ *(bzw.* $\mathrm{suff}^\lambda(u)$*) bezeichnet* $\mathrm{pref}(u) \cup \lambda$ *(bzw.* $\mathrm{suff}(u) \cup \lambda$*). Sei $n \leq |u|$. Dann bezeichnet* $\mathrm{pref}_n(u)$ *(bzw.* $\mathrm{suff}_n(u)$*) den Präfix (bzw. Suffix) der Länge n von u.*

Definition 2.5 *Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^+$ heißen* stark überlappungsfrei*, falls u kein Faktor von v und v kein Faktor von u ist und außerdem* $\mathrm{pref}(u) \cap \mathrm{suff}(v) = \emptyset$ *und* $\mathrm{pref}(v) \cap \mathrm{suff}(u) = \emptyset$ *gelten.*

Gelegentlich werden wir zwei nicht stark überlappungsfreie Wörter u, v als *überlappend* bezeichen. Anschaulich lassen sich u und v dann ‚übereinanderschieben', es existiert also ein $w \in \Sigma^+$, so dass u und v Faktoren von w sind und außerdem noch $|w| < |u| + |v|$ gilt. Später werden wir die Überlappungsfreiheit verwenden, um Wörtern gewisse Strukturen aufzuzwingen und unangehme Sonderfälle in Fallunterscheidungen auszuschließen.

Eine wichtige Eigenschaft stark überlappungsfreier Wörter ist, dass sie nicht kommutieren und demzufolge nicht Wurzel desselben Wortes sein können:

Proposition 2.5 *Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei. Dann gilt: $uv \neq vu$.*

Beweis: Indirekt. Angenommen, $uv = vu$. Dann gilt nach Lemma 2.2 $\rho(u) = \rho(v)$, es existieren also $m, n \in \mathbb{N}$ und ein $r \in \Sigma^+$ mit $u = r^{m+1}$ und $v = r^{n+1}$. Also gilt $uv = r^{m+n+2}$, demnach ist uv imprimitiv. Allerdings ist uv nach Proposition 2.6 primitiv; die Annahme ist also falsch. $\square$

Weiterhin ist die Konkatenation zweier stark überlappungsfreier Wörter primitiv:

Proposition 2.6 *Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei. Dann ist uv primitiv, es gilt also $uv = \rho(uv)$.*

Beweis: Indirekt. Angenommen, uv ist imprimitiv. Dann existieren ein $w \in \Sigma^+$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $uv = w^{n+2}$. Angenommen, $|u| \leq |w|$. Dann existiert ein $w' \in \Sigma^*$ mit $w = uw'$, damit gilt $uv = uw'w^{n+1}$, also $v = w'(uw')^{n+1}$ - also ist u Faktor von v, Widerspruch zu u, v stark überlappungsfrei. Analog führt $|v| \leq |w|$ zu einem Widerspruch. Gilt aber $|u| > |w| < |v|$, so folgt $w \in \text{pref}(u)$ und $w \in \text{suff}(v)$, Widerspruch zu u, v stark überlappungsfrei. $\square$

Außerdem lässt sich eine weitere handliche Eigenschaft stark überlappungsfreier Wörter beobachten – man kann sie zu neuen stark überlappungsfreien Wörtern kombinieren und so neue Paare stark überlappungsfreier Wörter erhalten:

Proposition 2.7 *Seien $u, v, w \in \Sigma^+$, so dass u und v sowie u und w stark überlappungsfrei sind, dann sind auch u und vw stark überlappungsfrei.*

Beweis: Indirekt. Seien $u, v, w \in \Sigma^+$, u und v sowie u und w stark überlappungsfrei. Angenommen, u und vw sind nicht stark überlappungsfrei, dann ist einer der folgenden Fälle erfüllt:

1. u ist ein Faktor von vw,
2. vw ist ein Faktor von u,
3. es existiert ein $x \in \text{pref}(u) \cap \text{suff}(vw)$,
4. es existiert ein $x \in \text{suff}(u) \cap \text{pref}(vw)$.

Fall 1: Ist u ein Faktor von vw, so existieren $v', w' \in \Sigma^*$ mit $vw = v'uw'$, außerdem gilt $|v| > |v'|$. Also ist $\text{pref}(u) \cap \text{suff}(v) \neq \emptyset$, Widerspruch zu u, v stark überlappungsfrei.
Fall 2: Ist vw ein Faktor von u, so ist auch v ein Faktor von u. Dies widerspricht der Forderung, dass u und v stark überlappungsfrei sind.
Fall 3: Sei $x \in \text{pref}(u) \cap \text{suff}(vw)$. Gilt $|x| \leq |w|$, so ist $x \in \text{suff}(w)$, damit gilt $x \in \text{suff}(w) \cap \text{pref}(u)$, Widerspruch zu u und w stark überlappungsfrei. Gilt andererseits $|x| > |w|$, so existiert ein $x' \in \Sigma^+$ mit $x = x'w$ und $x' \in \text{suff}(v)$. Da aber $x'w \in \text{pref}(u)$, gilt auch $x' \in \text{pref}(u)$ und somit $x' \in \text{pref}(u) \cap \text{suff}(v)$. Widerspruch zu u und v stark überlappungsfrei.

Fall 4: Analog zu Fall 3. □

Durch vollständige Induktion lässt sich aus dieser Proposition unmittelbar folgendes schließen:

Kommentar 2.8 *Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei. Dann sind für alle $m, n \in \mathbb{N}_1$ auch u^m und v^n stark überlappungsfrei.*

Proposition 2.7 lässt sich allerdings nicht umkehren, da zum Beispiel die Wörter `cabb` und `abab` stark überlappungsfrei sind, `cabb` und `ab` hingegen nicht.

Neben dem Kommutieren gibt es eine zweite klassische Eigenschaft von Wortpaaren:

Definition 2.6 *Zwei Wörter $u, v \in \Sigma^+$ heißen* konjugiert *(Schreibweise: $u \approx v$) falls es $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ gibt mit $u = w_1 w_2$ und $v = w_2 w_1$.*

Lemma 2.9 ([Per83]) *Seien $v, w \in \Sigma^+$. Folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) $v \approx w$,

(ii) *es existiert ein $u \in \Sigma^*$ mit $vu = uw$,*

(iii) *es existieren $u, u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $vu = uw$, $v = u_1 u_2$, $w = u_2 u_1$, $u \in u_1(u_2 u_1)^*$.*

Eine praktische kleine Eigenschaft von Wörtern mit der in Fall (iii) erwähnten Gestalt ist die folgende:

Proposition 2.10 *Für alle $u \in \Sigma^+$ und beliebige $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2 u_1)^*$ gilt: $u_1 u_2 u = u u_2 u_1$.*

Beweis: Sei $u \in \Sigma^*$, $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2 u_1)^*$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u = u_1(u_2 u_1)^n$, folglich gilt: $u_1 u_2 u = u_1 u_2 u_1 (u_2 u_1)^n = u_1 (u_2 u_1)^n u_2 u_1 = u u_2 u_1$. □

Man kann also sozusagen u über die u_1, u_2 ‚hinwegschieben'. Zu einem gegebenen $u \in \Sigma^+$ alle $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ zu finden, für die $u \in u_1(u_2 u_1)^*$ gilt, wird für die hier stattfindenden Betrachtungen von Bedeutung sein, da immer wieder Gleichungen mit konjugierten Wörtern zu lösen sind. Diese Grundidee findet sich indirekt auch in Proposition 2.12.

Natürlich stellt sich zuerst die Frage, ob zu jedem $u \in \Sigma^*$ stets u_1, u_2 mit $u \in u_1(u_2 u_1)^*$ existieren:

Proposition 2.11 *Sei $u \in \Sigma^+$. Dann existieren $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u = u_1(u_2 u_1)^n$.*

Beweis: Egal welches u man wählt, folgende Lösungen erfüllen stets die genannte Gleichung:

1. $u_1 = u$, $u_2 \in \Sigma^*$ beliebig, $n = 0$,

2. $u_1 = \lambda$, $u_2 = u$, $n = 1$.

Im ersten Fall gilt $u_1(u_2u_1)^n = u(u_2u)^0 = u$, im zweiten gilt $u_1(u_2u_1)^n = \lambda(u\lambda)^1 = u$. $\square$

Genau genommen werden uns später aber nicht die u_1, u_2 mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ interessieren, sondern lediglich ihre jeweiligen Konkatenationen u_1u_2 und u_2u_1; weiterhin genügt es für unsere Zwecke, uns auf die u zu beschränken, die Potenzen unperiodischer Wörter sind (im Gegensatz zu beispielsweise `aba` und `bcbbcb`). Will man nun zu einem solchen $u \in \Sigma^+$ alle u_1u_2 und u_2u_1 mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ finden, so sind nur folgende Möglichkeiten zu betrachten:

Proposition 2.12 *Seien $u \in \Sigma^+$, $k \in \mathbb{N}_1$, so dass $\rho(u)$ unperiodisch und $\rho(u)^k = u$. Dann gilt für alle u_1, $u_2 \in \Sigma^*$, $m \in \mathbb{N}$ mit $u = u_1(u_2u_1)^m$:*

1. *Aus $u_1u_2 = u_2u_1$ folgt $u_1u_2 = \rho(u)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_1$,*

2. *aus $u_1u_2 \neq u_2u_1$ folgt $u_1 = u$, $u_2 \in \Sigma^* \setminus \rho(u)^*$.*

Beweis: Seien u, u_1, u_2, k, m wie oben. Die beiden Fälle $u_1u_2 = u_2u_1$ und $u_1u_2 \neq u_2u_1$ sind (offensichtlich) disjunkt und erschöpfend; betrachten wir nun einen Fall nach dem anderen.
Fall 1: Angenommen, es gilt $u_1u_2 = u_2u_1$. Ist $u_1 = \lambda$, so folgt daraus $u = \rho(u)^k = u_1(u_2u_1)^m = u_2^m$. Nach Proposition 2.3 gilt $\rho(u) = \rho(u_2)$; es existiert dann also ein $n \in \mathbb{N}_1$ mit $u_2 = \rho(u)^n$ und somit $u_1u_2 = u_2u_1 = \rho(u)^n$. In diesen Fall stimmt also die Behauptung.

Gilt andererseits $u_2 = \lambda$, so folgt daraus $u = \rho(u)^k = u_1(u_2u_1)^m = u_1^{m+1}$. Auch hier gilt $\rho(u) = \rho(u_1)$ und somit $u_1 = \rho(u)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_1$. Damit gilt $u_1u_2 = u_2u_1 = \rho(u)^n$.

Betrachten wir also den letzten Fall, $u_1, u_2 \neq \lambda$. Nach Lemma 2.2 gilt nun $\rho(u_1) = \rho(u_2)$. Somit existieren $p, q \in \mathbb{N}_1$ mit $u_1 = \rho(u_1)^p$ und $u_2 = \rho(u_1)^q$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} u &= u_1(u_2u_1)^m \\ &= \rho(u_1)^p \left(\rho(u_2)^q \rho(u_1)^p\right)^m \\ &= \rho(u_1)^{(m+1)p+mq}. \end{aligned}$$

Nach Proposition 2.3 gilt $\rho(u) = \rho(u_1)$ und somit $u_1 = \rho(u)^p$, $u_2 = \rho(u)^q$. Hieraus folgt $u_1u_2 = u_2u_1 = \rho(u)^{p+q}$, da $p, q \in \mathbb{N}_1$ ist auch für $u_1, u_2 \neq \lambda$ die Behauptung erfüllt.
Fall 2: Gilt $u_1u_2 \neq u_2u_1$, so muss $u_1, u_2 \neq \lambda$ gelten. Wir richten unser Augenmerk nun auf den Parameter m in der Gleichung $u = u_1(u_2u_1)^m$. Gilt $m = 0$,

so folgt daraus $u = u_1$. Nun gilt:

$$
\begin{array}{lcl}
 & u_1 u_2 \neq u_2 u_1 & \\
\Leftrightarrow & u u_2 \neq u_2 u & \\
\Leftrightarrow & \rho(u_2) \neq \rho(u) & \text{(nach Lemma 2.2)} \\
\Leftrightarrow & u_2 \notin \rho(u)^* & \\
\Leftrightarrow & u_2 \in \Sigma^* \setminus \rho(u)^*. &
\end{array}
$$

Für $m = 0$ ist die Behauptung also wahr; abschließend ist noch zu zeigen, dass der Fall $m > 1$ nicht eintreten kann. Angenommen, es gilt $u = \rho(u)^k = u_1(u_2u_1)^m$ mit $m > 0$ und $u_1, u_2 \neq \lambda$. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

2.1. $|\rho(u)| > |u_1|$,

2.2. $|\rho(u)| \leq |u_1|$ und $|\rho(u)| \mid |u_1|$,

2.3. $|\rho(u)| < |u_1|$ und $|\rho(u)| \nmid |u_1|$.

Fall 2.1: Aus $|\rho(u)| > |u_1|$ folgt $u_1 \in \text{pref}\,(\rho(u)) \cap \text{suff}\,(\rho(u))$. Nach Lemma 2.14 existieren $u_3, u_4 \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u_1 = u_3(u_4u_3)^r$ und $\rho(u) = u_3(u_4u_3)^{r+1}$. Da $\rho(u)$ unperiodisch ist, muss $r = 0$ und $u_3 = \lambda$ gelten. Daraus folgt $u_1 = u_3(u_4u_3)^r = u_3 = \lambda$ und somit $u_1u_2 = u_2 = u_1u_2$ – Widerspruch.
Fall 2.2: Gilt $|\rho(u)| \mid |u_1|$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n < k$ und $u_1 = \rho(u)^n$. Somit gilt

$$
\begin{array}{lrcl}
 & u & = & u_1(u_2u_1)^m \\
\Leftrightarrow & \rho(u)^k & = & \rho(u)^n \ (u_2\ \rho(u)^n)^m \\
\Leftrightarrow & \rho(u)^k & = & \rho(u)^n \ (u_2\ \rho(u)^n)^{m-1} \ u_2\ \rho(u)^n \\
\Leftrightarrow & \rho(u)^{k-2n} & = & (u_2\ \rho(u)^n)^{m-1}\, u_2.
\end{array} \tag{1}
$$

Nun vergleichen wir $|u_2|$ und $\rho(u)$.
Fall 2.2.1: Gilt $|u_2| < |\rho(u)|$, so folgt auch hier $u_2 \in \text{pref}\,(\rho(u)) \cap \text{suff}\,(\rho(u))$ und somit (nach Lemma 2.2) die Existenz von $u_3, u_4 \in \Sigma^*$, $p \in \mathbb{N}$ mit $u_2 = u_3(u_4u_3)^p$ und $\rho(u) = u_3(u_4u_3)^{p+1}$. Da $\rho(u)$ unperiodisch ist, muss $p = 0$ und $u_3 = \lambda$ gelten, daraus folgt $u_2 = u_3(u_4u_3)^p = u_3 = \lambda$. Auch dies ist ein Widerspruch, da, wie gesagt, $u_2 \neq \lambda$ gelten muss.
Fall 2.2.2: Gilt hingegen $|u_2| \geq |\rho(u)|$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $|\rho(u)| \mid |u_2|$ und $|\rho(u)| \nmid |u_2|$. Im ersten Fall existiert ein $p \in \mathbb{N}$ mit $u_2 = \rho(u)^p$, damit gilt $u_1\, u_2 = \rho(u)^n\, \rho(u)^p = \rho(u)^p\, \rho(u)^n = u_2\, u_1$. Widerspruch.

Interessanter ist es, wenn $|\rho(u)| \nmid |u_2|$ gilt. Dann existiert nämlich ein $p \in \mathbb{N}_1$, so dass $\left|\rho(u)^{p+1}\right| > |u_2|$ und $|\rho(u)^q| < |u_2|$ für alle $q \leq p$. Wie an (1) zu erkennen ist, existieren $u_p, u_s \in \Sigma^*$ mit

$$u_2 = \rho(u)^p u_s = u_p \rho(u)^p \tag{2}$$

und
$$0 < |u_p| = |u_s| < |\rho(u)|. \tag{3}$$
Aus (2) folgt (nach Lemma 2.9) $u_p \approx u_s$; somit existieren $u_3, u_4 \in \Sigma^*$ und ein $r \in \mathbb{N}$ mit $u_p = u_3u_4$, $u_s = u_4u_3$, $\rho(u)^r = u_3(u_4u_3)^r$.

Angenommen, es gilt $u_3 = \lambda$. Dann ist $\rho(u)^p = u_3(u_4u_3)^r = u_4^r$. Nach Proposition 2.3 folgt daraus $\rho(u) = \rho(u_4)$. Daraus folgt
$$\begin{aligned}\rho(u_4) &= \rho(u)\\ &> |u_s| && \text{(wegen (3))}\\ &= |u_3| + |u_4|\\ &\geq |u_4|.\end{aligned}$$
Demnach folgt aus $u_3 = \lambda$ stets $\rho(u_4) > u_4$, und das kann nun wirklich nicht sein.

Gilt hingegen $u_3 \neq \lambda$, so folgt daraus $u_3 \in \operatorname{pref}(\rho(u)) \cap \operatorname{suff}(\rho(u))$, da $|u_3| \leq |u_s| < |\rho(u)|$. Nach Lemma 2.2 existieren $u_5, u_6 \in \Sigma^*$ sowie ein $r \in \mathbb{N}$ mit $u_3 = u_5(u_6u_5)^r$ und $\rho(u) = u_5(u_6u_5)^{r+1}$. Bekanntermaßen ist $\rho(u)$ unperiodisch, also muss $u_5 = \lambda$, $r = 0$ und $u_3 = \lambda$ gelten – Widerspruch.

Fall 2.3: Gilt $|\rho(u)| < |u_1|$, $|\rho(u)| \nmid |u_1|$ so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left|\rho(u)^{n+1}\right| > |u_1|$ und $|\rho(u)^p| < |u_1|$ für alle $p \leq n$. Auch hier existieren $u_p, u_s \in \Sigma^+$ mit
$$u_1 = \rho(u)^n u_s = u_p \rho(u)^n.$$
Hierbei gilt ebenfalls (3); überhaupt führt die gleiche Vorgehensweise wie an der entsprechenden Stelle in Fall 2.2.2 zu einem Widerspruch.

Somit folgt aus $u_1u_2 \neq u_2u_1$ stets $m = 0$. □

Das folgende Resultat ist für diese Arbeit nur von indirekter Bedeutung, es vertieft jedoch das Verständnis der zu einem u gehörenden u_1, u_2 mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$. Wenn man selbst versucht, nach Lemma 2.9, Punkt (iii) solche u_1, u_2 zu finden, so mag der Eindruck enstehen, dass $v = u_1u_2$, $w = u_2u_1$ keine erschöpfende Darstellung sei. Man denke zum Beispiel an $u = \texttt{aba}$; sicherlich erfüllt doch nicht nur $v = \texttt{ab}$, $w = \texttt{ba}$ die Gleichung $vu = \underline{\texttt{ab}\,\texttt{a}}\texttt{ba} = uw$, sondern auch $v = \texttt{abab}$, $w = \texttt{baba}$ oder $v = \texttt{ababab}$, $w = \texttt{bababa}$. Muss also nicht allgemeiner $v = (u_1u_2)^n$, $w = (u_2u_1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, um wirklich alle v, w mit $vu = uw$ zu beschreiben?

Dies ist aber ein Trugschluss, denn der zuvor genannte Ausdruck ist bereits mächtig genug, um alle Lösungen zu beschreiben:

Lemma 2.13 *Seien $w, x \in \Sigma^+$, $u, v \in \Sigma^*$, $m, n \in \mathbb{N}$ mit $w = u(vu)^m$ und $x = (uv)^{n+1}$. Dann existieren $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ mit $w \in w_1(w_2w_1)^*$ und $x = w_1w_2$.*

Beweis: Seien w, x, u, v, m, n wie oben angegeben. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, nämlich $n + 1 > m$ (Fall 1) und $n + 1 \leq m$ (Fall 2.)

Fall 1: Gilt $n+1 > m$ dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m+k+1 = n+1$. Sei $w_1 =$

$u(vu)^m$ und $w_2 = v(uv)^k$. Offensichtlich gilt $w_1 = w$, damit ist $w \in w_1(w_2w_1)^*$. Zudem gilt

$$\begin{aligned} w_1\, w_2 &= u(vu)^m\, v(uv)^k \\ &= uv(uv)^m(uv)^k \\ &= (uv)^{m+k+1} \\ &= (uv)^{n+1} \\ &= x. \end{aligned}$$

Bleibt noch der andere Fall:
Fall 2: Es gelte $n+1 \leq m$, außerdem seien $p = m \operatorname{div}(n+1)$, $q = m \operatorname{mod}(n+1)$, und $r = n - q$. Es gilt $0 \leq q \leq n$, $0 \leq r \leq n$ und $q + r + 1 = n + 1$. Sei $w_1 = (uv)^q u$, $w_2 = v(uv)^r$.
Es gilt $w_1\, w_2 = (uv)^q u\, v(uv)^r = (uv)^{q+r+1} = (uv)^{n+1} = x$, analog dazu ergibt sich $w_2\, w_1 = (vu)^{n+1}$ und somit

$$\begin{aligned} w_1(w_2w_1)^p &= w_1((vu^{n+1}))^p \\ &= w_1(vu)^{p(n+1)} \\ &= u(vu)^q(vu)^{p(n+1)} \\ &= u(vu)^{p(n+1)+q} \\ &= u(vu)^m \\ &= w. \end{aligned}$$

□

Der Fehler in der vor diesem Resultat genannten Überlegung liegt darin, dass übersehen wurde, dass durchaus $u_1 = u$ gelten kann und in u_2 somit beliebige Wörter vorkommen können, die kein Faktor von u sein müssen. Dieses Phänomen findet sich auch indirekt in Proposition 2.12.

Eine nützliche Anwendung der Zerlegung eines Wortes u in u_1, u_2 mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ findet sich zum Beispiel, wenn ein Wort sowohl Präfix als auch Suffix eines anderen ist:

Lemma 2.14 *Seien $u, v \in \Sigma^*$ mit $|u| < |v|$. Wenn $u \in \operatorname{pref}^\lambda(v) \cap \operatorname{suff}^\lambda(v)$ gilt, dann existieren $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u = u_1(u_2u_1)^n$ und $v = u_1(u_2u_1)^{n+1}$.*

Beweis: Seien $u, v \in \Sigma^+$ mit $|u| < |v|$ und $u \in \operatorname{pref}(v) \cap \operatorname{suff}(v)$. Dann gilt entweder $2|u| \leq |v|$ oder $2|u| > |v|$.
Fall 1: Es gelte $2|u| \leq |v|$. Dann existiert ein $w \in \Sigma^*$ mit $v = uwu$, also $u = u(wu)^0$ und $v = u(wu)^1$.
Fall 2: Es gelte $2|u| > |v|$. Nun existieren $u_1, u_2, u_3 \in \Sigma^+$ mit $v = u_1u_2u_3$ und $u = u_1u_2 = u_2u_3$. Daraus folgt nach Lemma 2.9 $u_1 \approx u_3$, also existieren

(ebenfalls nach Lemma 2.9) $u_4, u_5 \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u_2 = u_4(u_5u_4)^n$, $u_1 = u_4u_5$ und $u_3 = u_5u_4$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} u &= u_1u_2 \\ &= u_4u_5\ u_4(u_5u_4)^n \\ &= u_4(u_5u_4)^{n+1} \end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned} v &= u_1u_2u_3 \\ &= u_4u_5\ u_4(u_5u_4)^n\ u_5u_4 \\ &= u_4(u_5u_4)^{n+2}. \end{aligned}$$

□

Als letztes Resultat dieses Abschnitts stellen wir noch eine Kleinigkeit zu Eindeutigkeiten im Umfeld stark überlappungsfreier Wörter fest:

Lemma 2.15 *Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei. Dann gilt für alle $u', v' \in \Sigma^+$:*

$$\begin{aligned} & u'v' = uv \text{ und } v'u' = vu \\ \Leftrightarrow\ & u' = u \text{ und } v' = v. \end{aligned}$$

Beweis: Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei. Angenommen, es existieren $u', v' \in \Sigma^+$ mit $uv = u'v'$, $vu = v'u'$, $u \neq u'$ und $v \neq v'$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle – $|u| < |u'|$ (Fall 1) und $|u| > |u'|$ (Fall 2).
Fall 1: Sei $|u| < |u'|$. Wegen $x = uv = u'v'$ existiert ein $u_1 \in \Sigma^+$ mit $u' = uu_1$, wegen $y = vu = v'u'$ existiert ein $u_2 \in \Sigma^+$ mit $u' = u_2u$. Daraus folgt aber unmittelbar $v = u_1v'$ und $v = v'u_2$ und somit $u_1v' = v'u_2$. Nach Lemma 2.9 gilt dies genau dann, wenn $u_1 = v_1v_2$ und $u_2 = v_2v_1$, wobei $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ mit $v' \in v_1(v_2v_1)^*$. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $v' = v_1(v_2v_1)^n$, somit gilt

$$\begin{aligned} v &= u_1v' \\ &= v_1v_2\ v_1(v_2v_1)^n \\ &= v_1(v_2v_1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Damit gilt $v_2v_1 \in \mathrm{suff}(v)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} u' &= uu_1 = uv_1v_2 \\ &= u_2u = v_2v_1u. \end{aligned}$$

Ist $|u| \leq |v_2| + |v_1|$, so ist u ein Faktor von v, das ist ein Widerspruch zu u und v stark überlappungsfrei. Ist aber $|u| > |v_2| + |v_1|$, so gilt $v_2v_1 \in \mathrm{pref}(u)$ und somit $v_2v_1 \in \mathrm{pref}(u) \cap \mathrm{suff}(v)$, auch dies ist ein Widerspruch zu u und v stark überlappungsfrei. Fall 1 kann also nicht eintreten.

Fall 2: Sei $|u| > |u'|$. Da $x = uv = u'v'$ gilt $|u| + |v| = |u'| + |v'|$ und somit $|v| < |v'|$. Dies führt analog zu Fall 1 zu einem Widerspruch. □

Anders ausgedrückt: Ein aus zwei stark überlappungsfreien Wörtern u, v bestehende ‚gemeinsame Zerlegung' konjugierter, ungleicher Wörter ist, falls sie existiert, eindeutig.

Dieses Lemma gilt allerdings nicht in der umgekehrten Richtung; es existieren nämlich eindeutig zerlegbaren Paare (uv, vu), für die u und v nicht stark überlappungsfrei sind. Zum Beispiel kann das Paar $(\mathtt{babb}, \mathtt{bbba})$ nur mit $u = \mathtt{ba}$, $v = \mathtt{bb}$ als (uv, vu) dargestellt werden; u und v sind aber nicht stark überlappungsfrei, da $\mathtt{b} \in \mathrm{suff}(\mathtt{bb}) \cap \mathrm{pref}(\mathtt{ba})$.

2.2 Patternsprachen und Mehrdeutigkeit

Im Folgenden befassen wir uns mit den formalen Grundlagen der Motivation dieser Arbeit. Patternsprachen wurden in [Ang80a] eingeführt; für einen Überblick über diverse Resultate und offene Probleme empfehlen sich [MS97] und [Sal04].

Sei Σ ein Alphabet von sogenannten *Terminalen*, Ξ ein unendliches Alphabet von sogenannten *Variablen* mit $\Sigma \cap \Xi = \emptyset$. Ein *Pattern* ist ein Wort aus $(\Sigma \cup \Xi)^*$. Sei $S(\Sigma, \Xi)$ (bzw. $S^+(\Sigma, \Xi)$) die Menge aller Homomorphismen (bzw. nichtlöschenden Homomorphismen) $\sigma : (\Sigma \cup \Xi)^* \to \Sigma^*$ mit $\sigma(a) = a$ für alle Buchstaben $a \in \Sigma$. Ein Pattern α erzeugt die Sprachen

$$L_E(\alpha) = \{w \mid \sigma(\alpha) = w \text{ für ein } \sigma \in S(\Sigma, \Xi)\},$$
$$L_{NE}(\alpha) = \left\{w \mid \sigma(\alpha) = w \text{ für ein } \sigma \in S^+(\Sigma, \Xi)\right\}.$$

Da die $\sigma \in S(\Sigma, \Xi)$ (bzw. $S^+(\Sigma, \Xi)$) also Variablen durch Instantiierungen derselben ersetzen, bezeichnen wir sie auch als *Substitutionen*.

Ein Wort $w \in L_Z(\alpha)$ $(Z \in \{E, NE\})$ kann durch mehrere verschiedene Substitutionen aus α entstanden sein, zum Beispiel kann das Wort $\mathtt{aaba}$ aus dem Pattern XY unter anderem durch $\sigma(X) = \mathtt{a}$, $\sigma(Y) = \mathtt{aba}$ oder $\sigma(X) = \mathtt{aa}$, $\sigma(Y) = \mathtt{ba}$ erzeugt werden. Kann ein Wort w nur durch genau eine Substitution aus einem Pattern α entstehen, so bezeichnen wir w als eindeutig in Bezug auf α.

Der *Grad der Mehrdeutigkeit eines Wortes* w in Bezug auf ein Pattern α ist die Zahl der Homomorphismen $\sigma \in S^+(\Sigma, \Xi)$, für die $\sigma(\alpha) = w$ gilt (Homomorphismen, die nur Variablen, die nicht in α auftreten, unterschiedlich substituieren, mögen für diese Zwecke als gleich gelten).

Der *Grad der Mehrdeutigkeit* $\mu(\alpha)$ *eines Patterns* α ist der maximale Grad der Mehrdeutigkeit, die ein Wort $w \in L_{NE}(\alpha)$ annehmen kann[2], falls ein solcher existiert, ansonsten ist der Grad der Mehrdeutigkeit ∞. Gilt $\mu(\alpha) = 1$, so heißt

[2] Im Grunde könnte man noch den Grad der Mehrdeutigkeit hinsichtlich L_E unterscheiden, da dieser aber in unserem Kontext ohne Bedeutung ist, verzichten wir auf eine entsprechende Definition.

α eindeutig, ist $\mu(\alpha) = \infty$, so besitzt α unendliche Mehrdeutigkeit, ansonsten besitzt α endliche Mehrdeutigkeit.

Betrachten wir zum Beispiel das Pattern $\alpha = XY$. Es gilt

$$\mathtt{a}^n \in L_{NE}(\alpha) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_2,$$

weiterhin seien die Substitutionen $\sigma_{n,i}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ definiert durch

$$\sigma_{n,i}(X) = \mathtt{a}^i,$$
$$\sigma_{n,i}(Y) = \mathtt{a}^{n-1}.$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}_2$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\sigma_{n,i}(\alpha) = \mathtt{a}^i\,\mathtt{a}^{n-i} = \mathtt{a}^n,$$

$\mathtt{a}^n$ hat einen Mehrdeutigkeitsgrad von $n-1$ auf α. Somit können Wörter von beliebig hoher Mehrdeutigkeit in Bezug auf α gefunden werden, und es gilt $\mu(\alpha) = \infty$.

Andererseits sind offensichtlich für $\beta = XXX$ alle Wörter aus $L_{NE}(\beta)$ eindeutig auf β, es gilt also $\mu(\beta) = 1$. Wie in [MS94] gezeigt wird sind Pattern von endlicher Mehrdeutigkeit nicht gerade leicht zu finden; die meisten Pattern sind eindeutig oder von unendlicher Mehrdeutigkeit. Es lassen sich Pattern mit Mehrdeutigkeitsgrad $2^m 3^n$ für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ berechenbar konstruieren, außerdem ist für beliebige Pattern α und beliebige $n \in \mathbb{N}$ entscheidbar, ob $\mu(\alpha) = n$, $\mu(\alpha) < n$ oder $\mu(\alpha) > n$ gilt – die Entscheidbarkeit von $\mu(\alpha) = \infty$ und die Existenz von Pattern anderer Mehrdeutigkeit hingegen sind bislang noch offene Probleme.

Wir werden nun ein Pattern genauer betrachten, nämlich

$$\mathrm{Mau} = X\,\mathtt{ab}\,X\,\mathtt{bca}\,Y\,\mathtt{abc}\,Y.$$

Laut [MS94] ist Mau[3] das kürzeste bekannte Pattern, das einen Mehrdeutigkeitsgrad von 2 hat. Allerdings sind nicht alle Wörter in $L_{NE}(\mathrm{Mau})$ zweideutig. Gilt zum Beispiel $w = \sigma(\mathrm{Mau})$ und $|\sigma(X)|_{\mathtt{c}} = |\sigma(Y)|_{\mathtt{c}} = 0$, so ist w eindeutig auf Mau. In diesem Fall kommt $\mathtt{c}$ in w genau zweimal vor, dadurch ist die Länge von $\sigma(Y)$ fest und somit auch die Länge von $\sigma(X)$. Daher kann keine andere Substituion existieren, die w erzeugt.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Charakterisierung aller auf Mau zweideutigen Wörter aus $L_{NE}(\mathrm{Mau})$ zu finden (übrigens werden wir später feststellen, dass

[3] Warum Mau? Weil μ in LaTeX als `\mu` geschrieben wird, ein großes μ aber wie ein M und deswegen alles andere als elegant aussieht, und weil die anderen griechischen Buchstaben größtenteils verbraucht wurden. Ich entschuldige mich bei den Herren Mateescu und Salomaa für diese dreiste Benennung dieses von ihnen unbenannten Patterns, aber da sie diese Arbeit hier mit ziemlicher Sicherheit niemals lesen werden, ist mein schlechtes Gewissen nicht allzu groß.

alle Wörter aus $L_{NE}(\mathrm{Mau}) \setminus L_E(\mathrm{Mau})$ auf Mau eindeutig sind, also erübrigt sich im Grunde für unsere Zwecke die Unterscheidung von $L_{NE}(\mathrm{Mau})$ und $L_E(\mathrm{Mau})$).

Es liegt nahe, diese Fragestellung als ein Problem mit Wortgleichungen auszudrücken, gesucht sind nämlich alle Substutionen $\sigma_1 \neq \sigma_2$, für die

$$\begin{aligned}\sigma_1(\mathrm{Mau}) &= \sigma_1(X)\,\mathtt{ab}\,\sigma_1(X)\,\mathtt{bca}\,\sigma_1(Y)\,\mathtt{abc}\,\sigma_1(Y)\\ &= \sigma_2(X)\,\mathtt{ab}\,\sigma_2(X)\,\mathtt{bca}\,\sigma_2(Y)\,\mathtt{abc}\,\sigma_2(Y) = \sigma_2(\mathrm{Mau})\end{aligned}$$

gilt. Dabei können wir die Substitutionen aus den von ihnen erzeugten Bildern konstruieren. Es lohnt sich anzumerken, dass bei der thematisch eng verwandten Betrachtung eindeutiger Bilder von Homomorphismen in zum Beispiel [Rei04a] und [FRS05] stattdessen das Hauptaugenmerk auf die Substitutionen gerichtet wurde; dies war sozusagen ein ‚umgekehrter' Ansatz.

Dazu werden wir in Abschnitt 3 einige Werkzeuge zum Lösen verschiedener spezieller Wortgleichungen entwickeln, die dann in Abschnitt 4 zu einer Charakterisierungen aller in Bezug auf Mau zweideutigen Wörter führen.

Offensichtlich gibt es einige Sprachen, die von keinem Pattern erzeugt werden können, wie zum Beispiel die Sprachen

$$\begin{aligned}L_1 &= \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{a}^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}\,,\\ L_2 &= \{u^m\ \mathtt{a}\,v \mid m \in \mathbb{N}_2, u, v \in \Sigma^*\}\,.\end{aligned}$$

Daher werden wir das Konzept der Pattern zu parametrischen Pattern generalisieren. Neben den üblichen Terminalen und Nichtterminalen der ‚gewöhnlichen' Pattern verwenden wir hierbei noch numerische Parameter, wie sie auch in den in Abschnitt 2 eingeführten Kurzschreibweisen vorkommen.

Seien Σ, Ξ, Ω paarweise disjunkte Alphabete. Wir definieren *parametrische Pattern* auf die folgende Weise induktiv:

1. Jedes Pattern $\alpha \in (\Sigma \cup \Xi)^*$ ist ein parametrisches Pattern.

2. Ist α ein parametrisches Pattern, dann ist für alle $p \in \Omega$ auch $(\alpha)^p$ ein parametrisches Pattern.

3. Die Konkatenation zweier parametrischer Pattern ist ebenfalls ein parametrisches Pattern.

Angelehnt an die Terminologie ‚gewöhnlicher' Pattern bezeichnen wir die Buchstaben von Σ als *Terminale*, die von Ξ als *Variablen* oder *Wortparameter* und die von Ω als *numerische Parameter*. $\mathrm{PPAT}(\Sigma, \Xi, \Omega)$ bezeichnet die Menge aller Pattern mit Terminalen aus Σ, Nichtterminalen aus Ξ und numerischen Parametern aus Ω.

Eine *Belegung der numerischen Parameter* ist eine Funktion $\psi : \Omega \to \mathbb{N}$. Deren Anwendung auf ein parametrisches Pattern $\delta \in \mathrm{PPAT}(\Sigma, \Xi, \Omega)$ besteht darin, dass für jedes $p \in \Omega$ jeder in δ vorkommende Faktor $(\gamma)^p$ durch $\psi(p)$-fache

Wiederholung von γ ersetzt wird. Der Einfachheit halber schreiben wir dies als $\psi(\delta)$.

Ein parametrisches Pattern $\delta \in \mathrm{PPAT}(\Sigma, \Xi, \Omega)$ erzeugt die Sprache

$$L_P(\delta) = \{w \mid w = \sigma(\psi(\delta)) \text{ für ein } \sigma \in S(\Sigma, \Xi) \text{ und ein } \psi : \Omega \to \mathbb{N}\}\,.$$

Wie mächtig diese natürliche Definition ist zeigt sich, wenn man noch einmal die oben genannten Sprachen L_1 und L_2 betrachtet. Es gilt nämlich

$$L_1 = L_P\left(\mathtt{a}^m \mathtt{b}^n \mathtt{a}^n\right),$$
$$L_2 = L_P\left(UU(U)^m \mathtt{a} V\right)$$

(hierbei seien $\mathtt{a}, \mathtt{b} \in \Sigma$, $U, V \in \Xi$, $m, n \in \Omega$). Die Grundidee dieses Ansatzes stammt aus [Hme76]; dort werden parametrische Pattern als *parametrische Wörter* eingeführt und zur Charakterisierung der Lösungen von Wortgleichungen gebraucht. Diese Bezeichnung wird auch von späteren Arbeiten auf diesem Gebiet verwendet; für unsere Zwecke bietet es sich jedoch an, die Verwandtschaft dieser Konzepte auch in der Begrifflichkeit zu betonen.

Allerdings ist für unsere Zwecke noch ein weiterer Generalisierungsschritt nützlich. Sei $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_1$ und $\delta_i \in \mathrm{PPAT}(\Sigma, \Xi, \Omega)$ ein n-Tupel parametrischer Pattern und $(w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_i \in \Sigma^*$ ein n-Tupel von Wörtern.

$(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ *beschreibt* $(w_1, \ldots, w_n)$ genau dann, wenn ein $\sigma \in S(\Sigma, \Xi)$ und ein $\psi : \Omega \to \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\sigma\left(\psi\left(\delta_i\right)\right) = w_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt also nicht nur $w_i \in L_P(\delta_i)$, es müssen auch auf jedes δ_i der gleiche Homomorphismus und die gleiche Belegung der numerischen Parameter verwendet werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit fassen wir die Belegung der numerischen Parameter und die Substitution der Wortparameter zu einer einzigen Abbildung zusammen und bezeichnen diese als *Parameterbelegung*. Zugegeben, dieser Begriff wird etwas salopp definiert und verwendet; eine vollkommen exakte Definition von Syntax und Semantik parametrischer Pattern würde jedoch mehrere Seiten verbrauchen, ohne weitere Erkenntnis mit sich zu bringen.

3 Wortgleichungen

Letztlich bieten sich beim Lösen von Wortgleichungen nur drei grundsätzliche Vorgehensweisen, die üblicherweise kombiniert werden; nämlich die Argumentation über die Länge der Gleichungsteile und damit verbunden das Reduzieren von Gleichungen um gemeinsame Prä- oder Suffixe, das Erkennen von periodischen Wiederholungen (in seiner elementarsten Form vorhanden in Lemma 2.2), sowie die Reduktion auf Gleichungen, deren Lösungen bereits bekannt sind. Details zu diesen Methoden finden sich in [Cho83], [CK97] und [KP03].

Wir untermauern nun den Begriff der Wortgleichung mit einer entsprechenden Definition:

Definition 3.1 *Seien* Σ *und* Ξ *disjunkte Alphabete. Eine* Wortgleichung *über* Σ *mit Variablen aus* Ξ *ist ein Paar* $(l,r) \in (\Sigma \cup \Xi)^* \times (\Sigma \cup \Xi)^*$*.* (l,r) *wird im Folgenden als* $l = r$ *geschrieben.* (l,r) *heißt* terminalfrei*, wenn* l *und* r *keine Buchstaben aus* Σ *enthalten. Ein Homomorphismus* $\sigma : (\Sigma \cup \Xi)^* \to \Sigma^*$ *mit* $\sigma(a) = a$ *für alle* $a \in \Sigma$ *ist* Lösung *einer Wortgleichung* $\eta \equiv l = r$*, wenn* $\sigma(l) = \sigma(r)$*.* $\Gamma(\eta)$ *bezeichne die Menge aller Lösungen von* η*. Die Buchstaben aus* Σ *bezeichnen wir als* Terminale *oder auch* Konstanten*, die aus* Ξ *als* Nichtterminale *oder auch* Variablen*.*

Soweit ist das alles nicht weiter überraschend. Im Folgenden verwenden wir gewöhnlich als Variablen X, Y, Z und vielleicht sogar noch W; Lösungen geben wir in einer Tupelschreibweise an: Gilt zum Beispiel $\Xi = \{X, Y, Z\}$, so schreiben wir

$$\langle X ::= \sigma(X),\ Y ::= \sigma(Y),\ Z ::= \sigma(Z)\rangle.$$

Dabei werden die Variablen in der Reihenfolge ihres Vorkommes in der Gleichung aufgeführt.

Allerdings ist dieses Konzept für unsere Zwecke noch nicht ausdrucksstark genug. Man betrachte beispielsweise die Gleichung $\mathtt{a}\,X = X\,\mathtt{a}$ – nach Lemma 2.2 haben alle Lösungen die Form $\sigma(X) = \mathtt{a}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$; eine Form, die nicht mit einer simplen Abbildungen von Ξ auf Σ beschrieben werden kann, wohl aber durch die in Abschnitt 2.2 vorgestellten parametrischen Pattern.

Mit diesen lassen sich sogar die Lösungen von Gleichungen wie zum Beispiel $XY = YX$ beschreiben: Nach Lemma 2.2 muss für jede Lösung σ (die keine der beiden Variablen leer substituiert) nämlich $\rho\,(\sigma(X)) = \rho\,(\sigma(Y))$ gelten; demnach lassen sich alle Lösungen von $XY = YX$ durch

$$\langle X ::= w^m,\ Y ::= w^n\rangle$$

ausdrücken, wobei nicht *ein* w gewählt wird, sondern *alle* $w \in \Sigma^*$ verwendet werden können – wie bei den im vorigen Abschnitt eingeführten parametrischen Pattern. Konsequenterweise erweitern wir daher Lösungen durch Verwendung von parametrischen Pattern zu parametrischen Lösungen.

Definition 3.2 *Seien* Σ*,* Θ*,* Ξ*,* Ω *Alphabete, so dass*

$$\Sigma \cap \Theta = \Sigma \cap \Xi = \Sigma \cap \Omega = \Xi \cap \Omega = \emptyset.$$

Sei η *eine Wortgleichung über* Σ *mit Variablen aus* $\Theta = \{X_1, \dots, X_n\}$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$ *und seien* $\delta_1, \dots \delta_n \in \mathrm{PPAT}(\Sigma, \Xi, \Omega)$*.*

$\langle X_1 ::= \delta_1, \dots,\ X_n ::= \delta_n\rangle$ *heißt* parametrische Lösung *von* η*, wenn für alle von* $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ *beschriebenen* $(w_1, \dots, w_n) \subseteq \Sigma^n$ *das* n*-Tupel*

$$\langle X_1 ::= w_1, \dots, X_n ::= w_n\rangle$$

eine Lösung von η ist.

Eine Menge Π von parametrischen Lösungen von η heißt parametrische Beschreibung *von $\Gamma(\eta)$, wenn zu jeder Lösung σ von η eine parametrische Lösung τ und eine Parameterbelegung ψ existieren, so dass $\psi \circ \tau = \sigma$. Eine Wortgleichung η heißt* parametrisierbar*, wenn eine endliche parametrische Beschreibung von $\Gamma(\eta)$ existiert.*

Es leuchtet ein, dass Parametrisierbarkeit eine durchaus nützliche und angenehme Eigenschaft von Wortgleichungen ist. Um alle Lösungen einer parametrisierbaren Gleichung zu charakterisieren genügt es, eine endliche und damit verhältnismäßg kleine Anzahl parametrischer Lösungen anzugeben. Bei nichtparametrisierbaren Wortgleichungen muss deutlich mehr Aufwand getrieben werden; zum Beispiel durch Verwendung eines Kalküls, anhand dessen sich eine parametrische Beschreibung der Lösungen bestimmen lässt.

Interessanterweise können schon überaus kurze Wortgleichungen unparametrisierbar sein. Beispielsweise wird in [Hme76] gezeigt, dass die terminalfreie Gleichung $XYZ = ZVX$ nicht parametrisierbar ist; [Pet04] enthält einen weit lesbareren Beweis und zeigt nebenbei noch die Nicht-Parametrisierbarkeit der Gleichung $X\,\mathtt{ab}\,Y = Y\,\mathtt{ba}\,Z$. Petres Beweis wird übrigens in genau dieser Arbeit hier im Beweis zu Lemma 3.5 wiedergeben und zum Beweis der Nicht-Parametrisierbarkeit ähnlicher Gleichungen verwendet; mehr dazu in Abschnitt 3.2.

Beispiele für parametrische Beschreibungen der Lösungen unparametrisierbarer Wortgleichungen finden sich in [Wei04] (für die Gleichung $XYZ = ZVX$) und [IP00] (für die Gleichung $X\,\mathtt{ab}\,Y = Y\,\mathtt{ba}\,Z$); oder aber in Abschnitt 3.2.

Zur Einstimmung werden wir uns aber erst zuerst im folgenden Abschnitt mit einigen Klassen von parametrisierbarer Gleichungen beschäftigen.

3.1 Parametrisierbare Wortgleichungen

Wie in der Einleitung von Abschnitt 3 bereits erwähnt wurde, greift man beim Lösen von Wortgleichungen häufig auf einfachere Wortgleichungen zurück. In diesem Unterabschnitt beschäftigen wir uns mit parametrisierbaren Wortgleichungen steigender Allgemeinheit und struktureller Komplexität. Dabei werden wir aber die Parametrisierungen der Gleichungen nicht explizit angeben, sondern uns nur auf ‚Bauanleitungen' zum Erstellen vom Parametrisierungen beschränken. Unser erstes Beispiel folgt direkt aus der in Lemma 2.9 vorgestellten Charakterisierung der Konjugiertheit.

Proposition 3.1 *Sei $u \in \Sigma^+$, $x, y \in \Sigma^*$. Dann gilt $xu = uy$ genau dann, wenn $x = y = \lambda$ oder es existieren $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $x = u_1u_2$ und $y = u_2u_1$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$.*

Beweis: Dies ist Lemma 2.9, erweitert um $x = y = \lambda$. □

Ist $\rho(u)$ unperiodisch, so lässt sich Fall 2 nach Proposition 2.12 mit endlich vielen parametrischen Lösungen beschreiben; ist dies nicht der Fall, so ist zusätzlich noch jede mögliche Zerlegung von u in $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^n$ und $n \in \mathbb{N}_1$ zu berücksichtigen. Fall 2 von 2.12 kann (unter Verzicht auf erschöpfende Beschreibungen) durch eine parametrische Lösung, die einen Wortparameter enthält, erfüllt werden. Somit kann anhand von Lemma 3.3 zu jedem Wort u eine Parametrisierung der Wortgleichung $X\ u = u\ Y$ konstruiert werden.

Interessanter wird es, wenn wir eine spezielle Variante dieser Gleichung betrachten und uns auf eine Variable beschränken. Keine Sorge ob der Banalität dieser Problemstellung; wir werden dieses Resultat schrittweise verallgemeinern und uns auf bis zu drei Variablen hocharbeiten.

Lemma 3.2 *Seien $u,\ v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei, $x \in \Sigma^*$. Dann gilt $xuv = vux$ genau dann, wenn $x = v(uv)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis:
$\Leftarrow$: Sei $x = v(uv)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,uv &= v\underline{(uv)^n\ uv} \\ &= v\ \underline{uv(uv)^n} \\ &= vu\,x. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Sei $uvx = xvu$. Da $u,\ v$ stark überlappungsfrei sind, gilt $|x| > 0$, in der Tat muss sogar ganz u in x enthalten sein; sonst wären u und v nicht stark überlappungsfrei. Also existiert ein $x_1 \in \Sigma^*$ mit $x = x_1u$ für ein $x_1 \in \Sigma^*$. Daraus folgt $uvx_1 = x_1uv$. Wie klar zu erkennen ist kommutieren die Wörter x_1 und $w = uv$, es gilt also (siehe Lemma 2.2) $\rho(x_1) = \rho(w)$. Da $u,\ v$ stark überlappungsfrei sind, ist nach Proposition 2.6 $\rho(w) = uv$, also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_1 = (uv)^n$; damit gilt $x = x_1u = (uv)^n u = u(uv)^n$. □

Die Lösungen von Gleichungen dieser Form werden also durch die parametrische Lösung $\langle X ::= v\,(uv)^n\rangle$ beschrieben.

Dieses Resultat lässt sich generalisieren, indem wir nicht nur eine Variable, sondern zwei verwenden.

Lemma 3.3 *Seien $u,\ v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei, $x, y \in \Sigma^*$. Dann gilt $xuv = vuy$ genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle erfüllt ist:*

1. *$x = y = v$,*
2. *$x = vu_1u_2$ und $y = u_2u_1v$ und für $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$.*

Beweis:
$\Rightarrow$: Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei, $x, y \in \Sigma^*$. Gilt $x = y$, so folgt nach Lemma 3.2 $x = v(uv)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ist $n = 0$, so erfüllt $x = y = v$ Gleichung 1, ist $n > 0$ so erfüllt $x = vu\,w = w\,uv$ mit $w = v(uv)^{n-1}$ Gleichung 2.
Gilt $x \neq y$, folgt daraus $|x| = |y| > 0$. Da u und v stark überlappungsfrei sind, muss v komplett in x und y enthalten sein, ansonsten würde ein Teil von u in

v ,hineinragen'. Demnach existieren $x_1, y_1 \in \Sigma^*$ mit $x = vx_1$ und $y = y_1v$. Es folgt

$$\begin{aligned} & \underline{x}\, uv = vu\, \underline{y} \\ \Leftrightarrow \quad & \underline{v}x_1\, u\underline{v} = \underline{v}u\, y_1\underline{v} \\ \Leftrightarrow \quad & x_1\, u = u\, y_1. \end{aligned}$$

Nach Punkt (iii) von Lemma 2.9 existieren nun $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u = u_1(u_2u_1)^n$ und $x_1 = u_1u_2, y_1 = u_2u_1$. Dann gilt $x = vx_1 = vu_1u_2, y = u_2u_1v$. Damit ist Gleichung 2 erfüllt.
$\Leftarrow$: Wir betrachten eine Gleichung nach der anderen.
Gleichung 1: Sei $x = y = v$. Dann gilt $xuv = vuv = vuy$.
Gleichung 2: Seien $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u = (u_1u_2)^n u_1$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $x = vu_1u_2$ und $y = u_2u_1v$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\, uv &= v\underline{u_1u_2\, (u_1u_2)^n} u_1v \\ &= v\, \underline{u_1(u_2u_1)^n}\ \underline{u_2\, u_1v} \qquad \text{(nach Proposition 2.10)} \\ &= vu\, y. \end{aligned}$$

Und nichts anderes war zu zeigen. □

Ein weiterer Verallgemeinerungsschritt macht deutlich, dass Wortgleichungen noch weit kompliziertere Lösungsmengen besitzen können, auch wenn sie alle auf endlich viele gemeinsame Strukturen zurückzuführen sind.

Lemma 3.4 *Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei, $x, y, z \in \Sigma^*$. Dann gilt $x\, uv\, y = y\, vu\, z$ genau dann, wenn eine der folgenden Gleichungen gilt:*

1. *$x = z = \lambda$ und $y = u(vu)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$x = u_1u_2$, $z = u_2u_1$, $y = u_1u_2u(vu_1u_2u)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$,*
3. *$x = v_2v_1$, $z = v_1v_2$ und $y = v_2v_1uv_1v_2(vuv_1v_2)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ mit $v \in v_1(v_2v_1)^*$,*
4. *$x = v_2v_1u_1u_2$, $z = u_2u_1v_1v_2$ und $y = v_2v_1u_1u_2uv_1v_2(vu_1u_2uv_1v_2)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ und $v \in v_1(v_2v_1)^*$,*
5. *$x = wvu_1u_2$, $z = u_2u_1vw$ und $y = w(vu_1u_2uvw)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ und ein $w \in \Sigma^*$.*

Beweis:
$\Rightarrow$: Seien $x, y, z \in \Sigma^*$, $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei und es gelte $xuvy = yvuz$. Es gilt $xuv \approx vuz$, nach Lemma 2.9 existieren $y_1, y_2 \in \Sigma^*$ mit

$$\begin{aligned} xuv &= y_1y_2, \\ vuz &= y_2y_1, \\ y &\in y_1(y_2y_1)^*. \end{aligned}$$

Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $|y_2| = 0$,
2. $0 < |y_2| < |v|$,
3. $|y_2| = |v|$,
4. $|v| < |y_2| \leq |v| + |u|$,
5. $|v| + |u| < |y_2| \leq |v| + |u| + |x|$.

Fall 1: $|y_2| = 0$ ist gleichbedeutend mit $y_2 = \lambda$ und somit

$$y_1 = xuv = vuz. \tag{4}$$

Nach Lemma 3.3 haben alle Lösungen dieser Gleichung die Form $x = z = v$ (Fall 1.1) oder $x = vu_1u_2, z = u_2u_1v$ für beliebige $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ (Fall 1.2).
Fall 1.1: Sei $x = z = v$. Zusammen mit (4) ergibt sich $y_1 = xuv = vuv$ und somit

$$\begin{aligned} y &= y_1(y_2y_1)^n \\ &= vuv\,(\lambda vuv)^n \\ &= (vuv)^{n+1} \end{aligned}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Es gilt also Gleichung 3 mit $v_1 = v$, $v_2 = \lambda$.
Fall 1.2: Es gelte $x = vu_1u_2, z = u_2u_1v$ für beliebige $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$. Daraus folgt (nach (4)) $y_1 = vu_1u_2uv$ und somit $y = y_1^{n+1} = (vu_1u_2uv)^{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$; es gilt Gleichung 4 für $v_1 = v, v_2 = \lambda$.
Fall 2: Aus $|y_2| < |v|$ und $xuv = y_1y_2, vuz = y_2y_1$ folgt $y_2 \in \mathrm{pref}(v) \cap \mathrm{suff}(v)$. Nach Lemma 2.14 existieren $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$y_2 = v_1(v_2v_1)^n \tag{5}$$

und $v = v_1(v_2v_1)^{n+1}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} && xu\underline{v} &= y_1\underline{y_2} \\ \Leftrightarrow && xu\, v_1(v_2v_1)^{n+1} &= y_1\, v_1(v_2v_1)^n \\ \Leftrightarrow && xuv_1v_2\underline{v_1(v_2v_1)^n} &= y_1\, \underline{v_1(v_2v_1)^n} \\ \Leftrightarrow && xuv_1v_2 &= y_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Außerdem gilt $v_2v_1 \in \mathrm{suff}(v)$, daher muss $|x| \geq |v_2| + |v_1|$ gelten, sonst wären u und v nicht stark überlappungsfrei. Gleiches gilt für z. Es existieren also $x_1, z_1 \in \Sigma^*$ mit $x = v_2v_1x_1$ und $z = z_1v_1v_2$. Daraus folgt $x_1u = uz_1$. Nach Proposition 3.1 gilt nun $x_1 = z_1 = \lambda$ (Fall 2.1) oder es existieren $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$, $x_1 = u_1u_2$ und $z_1 = u_2u_1$ (Fall 2.2).

Fall 2.1: Aus $x_1 = z_1 = \lambda$ folgt $x = v_2v_1$ und $z = v_1v_2$, damit gilt $y_1 = v_2v_1uv_1v_2$, also

$$\begin{aligned} y_2y_1 &= v_1\underline{(v_2v_1)^n\; v_2v_1}uv_1v_2 \\ &= \underline{v_1\;(v_2v_1)^{n+1}}u\,v_1v_2 && \text{(nach Proposition 2.10)} \\ &= vuv_1v_2 \end{aligned}$$

und somit schließlich nach (6)

$$\begin{aligned} y &= y_1(y_2y_1)^n \\ &= v_2v_1uv_1v_2\;(vuv_1v_2)^n \end{aligned}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Dies erfüllt Gleichung 3.
Fall 2.2: Seien $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$, $x_1 = u_1u_2$ und $z_1 = u_2u_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= v_2v_1\underline{x_1} \\ &= v_2v_1\;u_1u_2 \end{aligned}$$

und analog $z = u_2u_1v_1v_2$. Daraus folgt nach (6)

$$\begin{aligned} y_1 &= \underline{x}\;uv_1v_2 \\ &= v_2v_1u_1u_2\;uv_1v_2 \end{aligned}$$

und somit nach (5)

$$\begin{aligned} y_2y_1 &= y_2\underline{y_1} \\ &= \underline{y_2}\;v_2v_1u_1u_2\;uv_1v_2 \\ &= v_1\underline{(v_2v_1)^n\;v_2v_1}u_1u_2uv_1v_2 \\ &= \underline{v_1\;(v_2v_1)^{n+1}}\;u_1u_2uv_1v_2 \\ &= v\;u_1u_2uv_1v_2. \end{aligned}$$

Also gilt schließlich

$$\begin{aligned} y &= \underline{y_1}(\underline{y_2y_1})^n \\ &= v_2v_1u_1u_2uv_1v_2\;(vu_1u_2uv_1v_2)^n. \end{aligned}$$

Dies erfüllt Gleichung 4.
Fall 3: Aus $|y_2| = |v|$ folgt $y_2 = v$ und somit $y_1 = xu = uz$, also gilt nach Proposition 3.1 $x = z = \lambda$ (Fall 3.1) oder $x = u_1u_2, z = u_2u_1$ für $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ (Fall 3.2).
Fall 3.1: Gilt $x = z = \lambda$ folgt $y_1 = u$ und somit $y = u(vu)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dies erfüllt Gleichung 1.
Fall 3.2: Aus $x = u_1u_2, z = u_2u_1$ folgen $y_1 = u_1u_2u$ und $y = u_1u_2u(vu_1u_2u)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dies erfüllt Gleichung 2.

Fall 4: Gilt $|v| < |y_2| \leq |v| + |u|$ so existieren $u_1 \in \text{pref}(u), u_2 \in \text{suff}(u)$ mit $y_2 = vu_1 = u_2v$. Dies ist widerspricht der Forderung, dass u und v stark überlappungsfrei sind. Für Zweifler: Da v kein Faktor von u und damit erst recht kein Faktor von u_1 ist gilt $|u_1| < |v|$, also $u_1 \in \text{suff}(v)$ und somit $u_1 \in \text{suff}(v) \cap \text{pref}(u)$. Widerspruch zu u, v stark überlappungsfrei.
Fall 5: Da $|v| + |u| < |y_2| \leq |v| + |u| + |x|$ existieren $x_1, z_1 \in \Sigma^*$ mit $x = y_1x_1, z = z_1y_1$ und $y_2 = x_1uv = vuz_1$. Nach Lemma 3.3 gilt nun entweder $x_1 = z_1 = v$ (Fall 5.1) oder $x_1 = vu_1u_2$ und $z_1 = u_2u_1v$ für eine $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ und somit $y_2 = vu_1u_2uv$ (Fall 5.2).
Fall 5.1: Sei $x_1 = z_1 = v$. Dann gilt $y_2 = vuv$ und $y_1 = w$ für ein beliebiges $w \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $x = wv$, $z = vw$ und

$$\begin{aligned} y &= y_1(y_2y_1)^n \\ &= w(vuvw)^n. \end{aligned}$$

Dies erfüllt Gleichung 3 mit $v_1 = v$, $v_2 = w$.
Fall 5.2: Sei $x_1 = vu_1u_2$ und $z_1 = u_2u_1v$ für eine $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$. Daraus folgt $y_2 = vu_1u_2uv$ und somit $x = y_1vu_1u_2$, $z = u_2u_1vy_1$ und $y = y_1(vu_1u_2uvy_1)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$; dies erfüllt Gleichung 5.

Jede Lösung der Wortgleichung $X\,uv\,Y = Y\,vu\,Z$ wird also von einer der Gleichungen beschrieben, das war's dann für diese Richtung des Beweises.

$\Leftarrow$: Hier behandeln wir jede Gleichung in einem Fall mit der entsprechenden Nummer.
Fall 1: Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x = z = \lambda$, $y = u(vu)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,uv\,y &= uv\,\underline{y} \\ &= uv\,\underline{u(vu)^n} \\ &= \underline{u\,(vu)^n}\,vu \\ &= y\,vu \\ &= y\,vu\,\underline{\lambda} \\ &= y\,vu\,z. \end{aligned}$$

Fall 2: Seien $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ und $x = u_1u_2$, $z = u_2u_1$, $y = u_1u_2u(vu_1u_2u)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,uv\,y &= u_1u_2\;uv\,\underline{u_1u_2u(vu_1u_2u)^n} \\ &= \underline{u_1u_2u\,(vu_1u_2u)^n}vu_1u_2u \\ &= y\,v\underline{u_1u_2u} \\ &= y\,vu\,\underline{u_2u_1} \\ &= y\,vu\,z. \end{aligned}$$

Fall 3: Seien $v_1, v_2 \in \Sigma$ mit $v \in v_1(v_2v_1)^*$, $n \in \mathbb{N}$ und $x = v_2v_1$, $z = v_1v_2$ und $y = v_2v_1uv_1v_2(vuv_1v_2)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x\,uv\,y &= v_2v_1\;u\underline{v\;v_2v_1}uv_1v_2(vuv_1v_2)^n \\
&= v_2v_1u\;v_1v_2\underline{v\;uv_1v_2(vuv_1v_2)^n} \\
&= \underline{v_2v_1uv_1v_2\;(vuv_1v_2)^n}vuv_1v_2 \\
&= y\;vu\;\underline{v_1v_2} \\
&= y\;vu\;z.
\end{aligned}$$

Fall 4: Seien $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$; $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ mit $v \in v_1(v_2v_1)^*$, $n \in \mathbb{N}$ und $x = v_2v_1u_1u_2$, $z = u_2u_1v_1v_2$, $y = v_2v_1u_1u_2uv_1v_2(vu_1u_2uv_1v_2)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x\,uv\,y &= v_2v_1u_1u_2\;u\underline{v\;v_2v_1}u_1u_2uv_1v_2(vu_1u_2uv_1v_2)^n \\
&= v_2v_1u_1u_2u\;v_1v_2\underline{v\;u_1u_2uv_1v_2(vu_1u_2uv_1v_2)^n} \\
&= \underline{v_2v_1u_1u_2uv_1v_2\;(vu_1u_2uv_1v_2)^n}vu_1u_2uv_1v_2 \\
&= y\;v\underline{u_1u_2}uv_1v_2 \\
&= y\;vu\;\underline{u_2u_1\;v_1v_2} \\
&= y\;vu\;z.
\end{aligned}$$

Fall 5: Seien $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$, $w \in \Sigma^*$, $n \in \mathbb{N}$ und $x = wvu_1u_2$, $z = u_2u_1vw$, $y = w(vu_1u_2uvw)^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x\,uv\,y &= w\underline{vu_1u_2\;uv\;w(vu_1u_2uvw)^n} \\
&= w\;(vu_1u_2uvw)^n v\underline{u_1u_2}uvw \\
&= \underline{w(vu_1u_2uvw)^n}v\;u_1u_2u\;vw \\
&= y\;v\underline{u_1u_2u}\;vw \\
&= y\;v\;u\underline{u_2u_1\;vw} \\
&= y\;vu\;z.
\end{aligned}$$

Und das war's dann auch schon. □

Ist $\rho(u)$ (bzw. $\rho(v)$) unperiodisch, so lassen sich anhand von Proposition 2.12 schnell die endlich vielen Beschreibungen der u_1, u_2 (beziehungsweise v_1, v_2) mit $u \in u_1(u_2u_1)^*$ durch parametrische Pattern angeben, anderenfalls sind noch die möglichen echten Zerlegungen von u (bzw. v) in u_1, u_2 mit $u \in u_1(u_2u_1)^+$ zu berücksichtigen. So oder so, jedenfalls ist die Gleichung $X\;uv\;Y = Y\;vu\;Z$ parametrisierbar. Nach Fall 2 in Proposition 2.12 kommen in den entsprechenden Parametrisierungen Wortparameter vor; in den Lösungen können also beliebige Wörter aus Σ^* als Faktor auftreten.

Fordern wir aber zusätzlich $X = Z$, so treten zwei überraschende Phänomene auf: Zum einen können die Lösungen nur aus den in u und v vorkommenden

Buchstaben bestehen, zum anderen ist die dadurch entstehende Wortgleichung $X\,uv\,Y = Y\,vu\,X$ nicht parametrisierbar. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

Ein weiteres Detail soll noch angemerkt werden: Im Beweis der $\Rightarrow$-Richtung von Lemma 3.4 argumentieren wir stets über den Vergleich der Längen der Anfangsstücke der Gleichungsteile und reduzieren diese entsprechend. In der Literatur wird dieses Vorgehen auch als Anwendung von *Levis Lemma* bezeichnet, siehe dazu zum Beispiel [Cho83], [CK97] und [KP03]. Tritt in der so behandelten Gleichung keine Variable mehr als zweimal auf, so bricht der Vorgang des Reduzierens stets nach endlich vielen Schritten ab. Auf diese Art lässt sich einer solchen Gleichung ein Graph zuordnen, der alle ihre Lösungen beschreibt; dieses Verfahren lässt sich auch auf nicht-parametrisierbare Gleichungen anwenden ([Pet04] stellt dabei übrigens fest, dass das Vorkommen von reduzierten Gleichungen, die in zwei verschiedenen Zyklen liegen, ein notwendiges Kriterium für die Nicht-Parametrisierbarkeit darstellt).

Glücklicherweise kommt in allen in dieser Arbeit betrachteten Gleichungen keine Variable öfter als zweimal vor, so dass Levis Lemma uns stets zum Ziel führt. Bei den in [MS94] Pattern höherer Mehrdeutigkeitsgrade ist dies nicht der Fall, so dass der hier vorgestellte Ansatz zu Charakterisierung aller zweideutigen Wörter aus $L_{NE}(\text{Mau})$ möglicherweise nicht direkt auf diese Pattern übertragbar sein dürfte.

Nun aber genug der Mutmaßungen, stattdessen befassen wir uns mit den lange schon versprochenen nicht-parametrisierbaren Wortgleichungen.

3.2 Unparametrisierbare Wortgleichungen

Wie bereits in Abschnitt 1 angesprochen wurde, werden wir für die Charakterisierung aller zweideutigen Wörter aus $L_{NE}(\text{Mau})$ auf die parametrische Beschreibung der Lösungen einer unparametrisierbaren Wortgleichung (nämlich der unten aufgeführten Gleichung η_8) zurückgreifen. Dazu benötigen wir wiederum parametrische Beschreibungen der Lösungen anderer unparametrisierbarer Wortgleichungen; um das alles überschaubar zu halten folgt nun zuerst ein kurzer Überblick über die verwendeten Gleichungen sowie Verweise auf zugehörigen parametrischen Beschreibungen der Lösungen:

η_1	$X\,\texttt{aabc}\,Y$	$=$	$Y\,\texttt{bcaa}\,X$	Lemma 3.12	S. 33
η_2	$X\,\texttt{abcbc}\,Y$	$=$	$Y\,\texttt{bcbca}\,X$	Lemma 3.14	S. 37
η_3	$X\,\texttt{aabc}\,Y$	$=$	$\texttt{a}\,Y\,\texttt{bca}\,X$	Proposition 3.15	S. 39
η_4	$X\,\texttt{bcbca}\,Y$	$=$	$\texttt{bc}\,Y\,\texttt{abc}\,X$	Proposition 3.16	S. 39
η_5	$X\,\texttt{abc}\,Y\,\texttt{a}$	$=$	$\texttt{a}\,Y\,\texttt{bca}\,X$	Proposition 3.17	S. 40
η_6	$X\,\texttt{bca}\,Y\,\texttt{bc}$	$=$	$\texttt{bc}\,Y\,\texttt{abc}\,X$	Proposition 3.18	S. 41
η_7	$X\,\texttt{abc}\,Y\,\texttt{abc}\,Z$	$=$	$Z\,\texttt{bca}\,Y\,\texttt{bca}\,X$	Kommentar 3.20	S. 45
η_8	$W\,\texttt{bca}\,XY\,\texttt{abc}\,X$	$=$	$Z\,\texttt{abc}\,WZ\,\texttt{bca}\,Y$	Lemma 3.21	S. 48

Allerdings sind noch einige Vorbereitungen notwendig: In [Pet04] wird die Nicht-Parametrisierbarkeit der terminalfreien Wortgleichung $XYZ = ZVX$ bewiesen.

Innerhalb dieses Beweises wird implizit die Nicht-Parametrisierbarkeit der Wortgleichung $X\,\mathtt{ab}\,Y = Y\,\mathtt{ba}\,X$ gezeigt; da jene für diese Arbeit hier besonders interessant ist, wird der Beweis nun explizit und geringfügig an unsere Notationen und Bedürfnisse angepasst wiedergegeben.

Lemma 3.5 ([Hme76]) *Die Wortgleichung* $\zeta \equiv X\,\mathtt{ab}\,Y = Y\,\mathtt{ba}\,X$ *ist nicht parametrisierbar.*

Beweisidee ([Pet04]): Wir definieren eine unendliche Klasse von Lösungen von ζ und zeigen, dass jede denkbare Parametrisierung von ζ nur endlich viele dieser Lösungen beschreibt. Daher kann ζ nicht parametrisierbar sein.

Wir beginnen mit einigen hilfreichen Definitionen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fibonacci-Zahlen sei durch $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Analog dazu definieren wir das (unendliche) Fibonacci-Wort F als Grenzwert der Wortfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $F_0 = \mathtt{b}$, $F_1 = \mathtt{a}$, $F_{n+2} = F_{n+1}F_n$. Alternativ lässt sich F auch unter Verwendung eines Homomorphismus $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $f(\mathtt{a}) = \mathtt{ab}$, $f(\mathtt{b}) = \mathtt{a}$ definieren, mehr dazu findet sich zum Beispiel in [Kar83] und [Kar04]. Der Themenkomplex einseitig unendlicher Wörter (in der Literatur auch als ω-Wörter bezeichnet) soll an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden; im Grunde genügt es uns, einfach nur alle Glieder der Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu betrachten.

Zur Veranschaulichung seien hier nun ein paar der ersten Folgenglieder aufgeführt:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= \mathtt{b},\\
F_1 &= \mathtt{a},\\
F_2 &= \underline{\mathtt{a}}\mathtt{b},\\
F_3 &= \underline{\mathtt{ab}}\mathtt{a},\\
F_4 &= \underline{\mathtt{aba}}\mathtt{ab},\\
F_5 &= \underline{\mathtt{abaab}}\mathtt{aba},\\
F_6 &= \underline{\mathtt{abaababa}}\mathtt{abaab},\\
F_7 &= \underline{\mathtt{abaababaabaab}}\mathtt{abaababa},\\
F_8 &= \underline{\mathtt{abaababaabaababaababa}}\mathtt{abaababaabaab}.
\end{aligned}
$$

Folgende Kleinigkeiten fallen sofort auf:

Kommentar 3.6 *Für alle* F_n *gilt* $|F_n| = f_n$.

Kommentar 3.7 *Für* $n \geq 2$ *gilt*

$$
\mathrm{suff}_2(F_n) = \begin{cases} \mathtt{ab} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \mathtt{ba} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}
$$

Weiterhin definieren wir nun eine Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ von Präfixen von F durch $G_n = \mathrm{pref}_{f_{n+1}-2}(w_{n+1})$. Die G_n entstehen also aus den F_{n+1}, indem die letzen zwei Zeichen weggelassen werden. Dies hat einen besonderen Sinn, denn dadurch gilt folgendes:

Proposition 3.8 ([Pet04]) *Sei $n \in \mathbb{N}_1$. Dann ist $\langle X ::= G_{2n+1}, Y ::= G_{2n}\rangle$ eine Lösung der Wortgleichung $\zeta \equiv X\,\mathtt{ab}\,Y = Y\,\mathtt{ba}\,X$.*

Beweis: Wir beginnen zuerst mit einer Hilfsbehauptung.
Hilfsbehauptung: Für alle $k \in \mathbb{N}_1$ gilt

$$G_{2k+1} = F_{2k}G_{2k}. \tag{7}$$

Dies zeigen wir durch vollständige Induktion über k. Für $k = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
G_{2k+1} = G_3 &= \mathrm{pref}_{f_4-2}(F_4)\\
&= \mathrm{pref}_3(\mathtt{abaab})\\
&= \mathtt{aba}\\
&= \mathtt{ab}\,\mathrm{pref}_1(\mathtt{aba})\\
&= F_2\,\mathrm{pref}_{f_3-2}(F_3)\\
&= F_2G_2 = F_{2k}G_{2k}.
\end{aligned}$$

Für $k = 1$ ist die Behauptung also erfüllt; nehmen wir also an, $G_{2k+1} = F_{2k}G_{2k}$ gelte für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
G_{2(k+1)+1} = G_{2k+3} &= \mathrm{pref}_{f_{2k+4}-2}(F_{2k+4})\\
&= \mathrm{pref}_{f_{2k+4}-2}(F_{2k+3}F_{2k+2})\\
&= F_{2k+3}\,\mathrm{pref}_{f_{2k+2}-2}(F_{2k+2})\\
&= F_{2k+3}G_{2k+1}\\
&= F_{2k+3}F_{2k}G_{2k}\\
&= F_{2k+2}F_{2k+1}F_{2k}G_{2k}\\
&= F_{2k+2}F_{2k+2}G_{2k}\\
&= F_{2k+2}F_{2k+2}\,\mathrm{pref}_{f_{2k+1}-2}(F_{2k+1})\\
&= F_{2k+2}\,\mathrm{pref}_{f_{2k+3}-2}(F_{2k+2}F_{2k+1})\\
&= F_{2k+2}\,\mathrm{pref}_{f_{2k+3}-2}(F_{2k+3})\\
&= F_{2k+2}G_{2k+2}.
\end{aligned}$$

Die Hilfsbehauptung ist also korrekt. Wir transformieren nun (7), um unsere eigentliche Behauptung beweisen zu können. Es gilt

$$\begin{aligned}
& & G_{2k+1} &= F_{2k}G_{2k}\\
&\Leftrightarrow & F_{2k+1}G_{2k+1} &= F_{2k+1}F_{2k}G_{2k}\\
&\Leftrightarrow & F_{2k+1}G_{2k+1} &= F_{2k+2}G_{2k}\\
&\Leftrightarrow & G_{2k}\,\mathtt{ba}\,G_{2k+1} &= G_{2k+1}\,\mathtt{ab}\,G_{2k}.
\end{aligned}$$

Wie behauptet ist also $\langle X ::= G_{2n+1},\, Y ::= G_{2n}\rangle$ stets eine Lösung von ζ. $\square$

Weiterhin benötigen wir die folgende Charakterisierung aller Lösungen von ζ:

Proposition 3.9 *Sei* Π_ζ *wie folgt definiert:*

1. $\langle X ::= \mathtt{a}^n,\, Y ::= \mathtt{a}^{n+1}\rangle \in \Pi_\zeta$,
2. $\langle X ::= \mathtt{b}^{n+1},\, Y ::= \mathtt{b}^n\rangle \in \Pi_\zeta$,
3. *Aus* $\langle X ::= x,\, Y ::= y\rangle \in \Pi_\zeta$ *folgt* $\langle X ::= x, Y ::= x\mathtt{ab}y\rangle \in \Pi_\zeta$,
4. *Aus* $\langle X ::= x,\, Y ::= y\rangle \in \Pi_\zeta$ *folgt* $\langle X ::= y\mathtt{ba}x,\, Y ::= y\rangle \in \Pi_\zeta$.

Dann ist Π_ζ *eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Wortgleichung* $\zeta \equiv X\,\mathtt{ab}\,Y = Y\,\mathtt{ba}\,X$.

Dieses Resultat findet sich (wenn auch anders formuliert und ohne Beweis) zum Beispiel auch in [IP00]. Aufgrund der auch später immer wieder angewendeten Vorgehensweise, die hier in einem recht überschaubaren Umfeld zu erkennen ist, gehen wir hier näher auf den Beweis ein. Die beim Beweis der Vollständigkeit verwendete Technik wird des öfteren als Anwendung von *Levis Lemma* bezeichnet, weiter Anmerkungen hierzu finden sich am Ende von Abschnitt 3.1.

Beweis: Zu zeigen sind die Vollständigkeit und die Korrektheit von Π_ζ (in Bezug auf ζ), also dass ganz Γ_ζ von Π_ζ beschrieben wird (Vollständigkeit), und auch nicht mehr (Korrektheit).

Vollständigkeit: Seien $x, y \in \Sigma^*$ mit $\langle X ::= x,\, Y ::= y\rangle \in \Gamma(\zeta)$. Dann gilt $|x| \neq |y|$ und damit entweder $|x| > |y|$ (Fall 1) oder $|y| > |x|$ (Fall 2). Unser Hauptaugenmerk werden wir dabei auf Fall 1 richten, da Fall 2 ganz und gar analog verläuft.

Fall 1: Aus $|x| > |y|$ folgt $x = y\,\mathtt{b}\,x_1$ für ein $x_1 \in \Sigma^*$ und somit $x_1\,\mathtt{ab}\,y = \mathtt{a}\,y\,\mathtt{b}\,x_1$. Nun gilt es zu unterscheiden, ob $|x_1| = 0$ oder $|x_1| > 0$.

Fall 1.1: Sei $x_1 = \lambda$. Dann gilt $\mathtt{b}\,y = y\,\mathtt{b}$ und somit nach Lemma 2.2 $y = \mathtt{b}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich $x = \mathtt{b}^{n+1}$; alle Lösungen dieser Form werden von Regel 2 erzeugt.

Fall 1.2: Gilt $|x_1| > 0$, so ist $x_1 = \mathtt{a}\,x_2$ für ein $x_2 \in \Sigma^*$. Dadurch ergibt sich $x_2\,\mathtt{ab}\,y = y\,\mathtt{ba}\,x_2$. Diese Gleichung hat wieder die gleiche Form wie ζ, es gilt also $x = y\,\mathtt{b}\,x_1 = y\,\mathtt{ba}\,x_2$, wobei $\langle X ::= x_2,\, Y ::= y\rangle \in \Gamma(\zeta)$. Auch für x_2 und y sind die beiden Fälle $|x_2| > |y|$ und $|x_2| < |y|$ zu unterscheiden. Tritt wiederum Fall 1.2 (oder sein Pendant für $|x_2| < |y|$) ein, so wird auf die gleiche Art weiterverfahren; bis schließlich irgendwann Fall 1.1 (oder sein Analogon) eintritt. Dieser Fall wird durch sukzessive Anwendung der Regeln 3 und 4 mit abschließender Anwendung der Regel 1 oder 2 abgedeckt.

Fall 2: Analog zu Fall 1, inklusive der Fälle 1.1 und 1.2. Hierfür sind die Regeln 1 (anstelle von Regel 2) und 3 (anstelle von Regel 4) zuständig.

Korrektheit: Diese Behauptung zeigen wir durch eine strukturelle Induktion entlang der verwendeten Regeln.

Regel 1: Gilt $x = \mathtt{a}^n$, $y = \mathtt{a}^{n+1}$ so folgt daraus

$$\begin{aligned} x \,\mathtt{ab}\, y &= \underline{\mathtt{a}^n \,\mathtt{a}}\mathtt{b}\, \underline{\mathtt{a}^{n+1}} \\ &= \underline{\mathtt{a}^{n+1}}\, \mathtt{ba}\, \underline{\mathtt{a}^n} \\ &= y \,\mathtt{ba}\, x. \end{aligned}$$

Unabhängig davon, welcher Wert n zugewiesen wird, ist $\langle X ::= \mathtt{a}^n,\ Y ::= \mathtt{a}^{n+1}\rangle$ eine Lösung von ζ.
Regel 2: Analog zu Regel 1.
Regel 3: Seien $\langle X ::= x,\ Y ::= y'\rangle$ Lösungen von ζ und $y = x \,\mathtt{ab}\, y'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \,\mathtt{ab}\, y &= x \,\mathtt{ab}\, \underline{x \,\mathtt{ab}\, y'} \\ &= \underline{x \,\mathtt{ab}\, y'}\, \mathtt{ba}\, x \qquad\qquad (\text{da } \langle X ::= x,\ Y ::= y'\rangle \in \Gamma(\zeta)) \\ &= y \,\mathtt{ba}\, x. \end{aligned}$$

Also erzeugt auch diese Regel Lösungen von ζ.
Regel 4: Analog zu Regel 3. □

Damit besitzen wir die nötigen Werkzeuge, um den Beweis von Lemma 3.5 zu führen.

Beweis Lemma 3.5 [Pet04]: Nach Proposition 3.8 existieren unendlich viele Lösungen von ζ, die jeweils aus zwei Präfixen G_{2n+1}, G_{2n} des Fibonacci-Wortes F bestehen. Laut [Kar83] kommt in F kein Faktor der Form w^n mit $w \in \Sigma^+$, $n \in \mathbb{N}_4$ vor; natürlich gilt dies somit auch für alle Faktoren G_i.

Eine parametrische Lösung $\langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle$, aus der durch eine Belegung ψ eine Lösung $\langle X ::= G_{2n+1},\ Y ::= G_{2n}\rangle = \langle X ::= \psi(x),\ Y ::= \psi(y)\rangle$ gewonnen werden kann, darf also keinem numerischen Parameter einen größeren Wert als 3 zuweisen.

Andererseits folgt aus Proposition 3.9, dass alle Lösungen von ζ keine anderen Buchstaben als $\mathtt{a}$ und $\mathtt{b}$ enthalten können; daher darf keine parametrische Lösung von ζ Wortparameter enthalten; sonst könnten nämlich beliebige Wörter aus Σ^* vorkommen.

Jede parametrische Lösung kann also nur endlich viele Lösungen der Form $\langle X ::= G_{2n+1},\ Y ::= G_{2n}\rangle$ beschreiben. Nach Proposition 3.8 existieren aber unendlich viele Lösungen dieser Form, also können nicht alle Lösungen von ζ anhand endlich vieler parametrischer Lösungen beschrieben werden. Somit ist ζ nicht parametrisierbar. □

Von den zu Beginn dieses Abschnitts vorgestellten Wortgleichungen sind zwei von herausragender Bedeutung für diese Arbeit, nämlich

$$\begin{aligned} \eta_1 &\equiv X \,\mathtt{aabc}\, Y = Y \,\mathtt{bcaa}\, X, \\ \eta_2 &\equiv X \,\mathtt{abcbc}\, Y = Y \,\mathtt{bcbca}\, X. \end{aligned}$$

Ein großer Teil der für das Hauptergebnis zu lösenden Gleichungen lässt sich auf diese beiden Gleichungen reduzieren; leider sind beide nicht parametrisierbar.

Wir zeigen dies für η_1 durch eine Abwandlung des Beweises zu Lemma 3.5, der Beweis für η_2 verliefe analog.

Zuerst benötigen wir aber noch ein weiteres Hilfsmittel:

Lemma 3.10 *Seien $u, v \in \Sigma^+$ stark überlappungsfrei und unperiodisch, $m, n \in \mathbb{N}_1$. Dann gilt für alle $x, y \in \Sigma^*$ mit $x\, u^m v^n\, y = y\, v^n u^m\, x$:*

$$x, y \in \{u, v\}^* .$$

Beweis: Da u und v stark überlappungsfrei sind, sind nach Kommentar 2.8 auch $u' = u^m$ und $v' = v^n$ stark überlappungsfrei. Wir betrachten nun anhand von Lemma 3.4 alle Lösungen der Gleichung $\eta \equiv X\, u'v'\, Y = Y\, v'u'\, Z$, für die $X = Z$ gilt. Dazu werden wir außerdem Proposition 2.12 benötigen, um alle u_1, u_2 mit $u' \in u_1(u_2u_1)^*$ und alle v_1, v_2 mit $v' \in v_1(v_2v_1)^*$ zu bestimmen. Das weitere Vorgehen orientiert sich an den Lösungen aus Lemma 3.4, jede der Gleichungen erhält hierbei einen Fall mit der entsprechenden Nummer. Sei also $\sigma \in \Gamma(\eta)$ mit $\sigma(X) = x$, $\sigma(Y) = y$, $\sigma(Z) = z$.
Fall 1: Es gilt $x = z = \lambda$, $y \in u'(v'u')^*$. Also gilt $x, y \in \{u, v\}^*$.
Fall 2: Es gilt $x = u_1u_2$, $z = u_2u_1$, $y \in u_1u_2u'(v'u_1u_2u')^*$ für $u_1, u_2 \in \Sigma^*$ mit $u_1(u_2u_1)^*$. Aus $x = z$ folgt $u_1u_2 = u_2u_1$, nach Proposition 2.12 ergibt sich $u_1u_2, u_2u_1 \in u^+$. Also gilt $x, z \in \{u, v\}^*$ und somit auch $y \in \{u, v\}^*$.
Fall 3: Es gilt $x = v_2v_1$, $z = v_1v_2$, $y \in v_2v_1u'v_1v_2\,(v'u'v_1v_2)^*$ für $v_1, v_2 \in \Sigma^*$ mit $v \in v_1(v_2v_1)^*$. Analog zu Fall 2 folgt nach Proposition 2.12

$$x = z = v_1v_2 = v_2v_1 \in v^+$$

und damit auch $z, y \in \{u, v\}^*$.
Fall 4: Es gilt $x = v_2v_1u_1u_2$, $z = u_2u_1v_1v_2$,

$$y \in v_2v_1u_1u_2u'v_1v_2(v'u_1u_2u'v_1v_2)^* \subset \{u_1u_2, u_2u_1, u, v_1v_2, v_2v_1, v\}^* .$$

Bevor wir mit der eigentlichen Behandlung dieses Falls fortfahren können, sind einige grundliegende Betrachtungen notwendig. Allgemein gilt entweder $u_1u_2 = u_2u_1$ und damit (nach Proposition 2.12) $u_1u_2 \in u^+$, oder aber $u_1u_2 \neq u_2u_1$ und somit $u_1 = u'$, $u_2 \in \Sigma^* \setminus u^*$.

Die gleiche Unterscheidung ist auch für v_1v_2 und v_2v_1 zu treffen; auf diese Art ergeben sich durch die Betrachtung der Möglichkeiten zu von $u_1u_2 \oplus u_2u_1$ und $v_1v_2 \otimes v_2v_1$ ($\oplus, \otimes \in \{=, \neq\}$) vier zu untersuchende Fälle. Einen dieser Fälle schließen wir im Voraus als widersprüchlich aus: Angenommen, es gilt $u_1u_2 = u_2u_1$ und $v_1v_2 = v_2v_1$. Nach Proposition 2.12 existieren $p, q \in \mathbb{N}$ mit $u_1u_2 = u_2u_1 = uu^p$ und $v_1v_2 = v_2v_1 = vv^q$. Daraus folgt

$$\begin{array}{lcl} & x = z & \\ \Leftrightarrow & \underline{v_2v_1}u_1u_2 = \underline{u_2u_1}v_1v_2 & \\ \Leftrightarrow & \underline{v_1v_2}\; u_1u_2 = \underline{u_1u_2}\; v_1v_2 & \text{(nach Annahme)} \\ \Leftrightarrow & v\; v^q u_1u_2 = u\; u^p v_1v_2. & \end{array}$$

Daraus folgt durch Vergleich der Längen von u und v entweder $u = v$, oder $u \in \mathrm{pref}(v)$, oder $v \in \mathrm{pref}(u)$. Jede dieser Möglichkeiten verstößt gegen die Forderung, dass u und v stark überlappungsfrei sind. Konzentrieren wir uns also auf die drei möglichen Fälle, nämlich:

1. $u_1u_2 = u_2u_1$ und $v_1v_2 \neq v_2v_1$,
2. $u_1u_2 \neq u_2u_1$ und $v_1v_2 = v_2v_1$,
3. $u_1u_2 \neq u_2u_1$ und $v_1v_2 \neq v_2v_1$.

Fall 4.1: Nach Proposition 2.12 gilt $u_1u_2 = u^r$, $v_1 = v'$, $v_2 \in \Sigma^* \setminus v^*$ (für ein $r \in \mathbb{N}_1$), also:

$$x = v_2v_1u_1u_2 = v_2v_1u^r = v_2v'u^r,$$
$$z = u_2u_1v_1v_2 = u^rv_1v_2 = u^rv'v_2.$$

Mit Lemma 3.2 folgt hieraus $v_2 \in u^r(v'u^r)^* \subset \{u,v\}^*$ und somit $x, y \in \{u,v\}^*$.
Fall 4.2: Durch Proposition 2.12 folgern wir $v_1v_2 = v^r$, $u_1 = u'$, $u_2 \in \Sigma^* \setminus u^*$ (für ein $r \in \mathbb{N}_1$) und damit:

$$x = v_2v_1u_1u_2 = v^ru'u_2,$$
$$z = u_2u_1v_1v_2 = u_2u'v^r.$$

Auch hieraus lässt sich, genau wie in Fall 4.1, $x, y \in \{u,v\}^*$ schließen.
Fall 4.3: Es gilt $u_1 = u'$, $v_1 = v'$, $u_2 \in \Sigma^* \setminus u^*$, $v_2 \in \Sigma^* \setminus v^*$

$$x = v_2v_1u_1u_2 = v_2v'u'u_2,$$
$$z = u_2u_1v_1v_2 = u_2u'v'v_2.$$

Es gilt also $x, y \in \{u, v, u_2, v_2\}^*$. Außerdem folgt aus $x = z$ unmittelbar

$$v_2v'u'u_2 = u_2u'v'v_2.$$

Dies ist wieder eine Gleichung der Form $X\ u'v'\ Y = Y\ v'u'\ X$. x lässt sich also (wie in Fall 1.2 von Proposition 3.9) durch sukzessive Anwendung der hier beschriebenen Fälle verkürzen, bis schließlich einer der nicht-rekursiven Fälle auftritt. Da in allen Fällen $x, y \in \{u,v\}^*$ gilt, gilt auch $u_2, v_2 \in \{u,v\}^*$ und somit schließlich auch in diesem Fall $x, y \in \{u,v\}^*$.
Fall 5: Es gilt $x = wv'u_1u_2$, $z = u_2u_1v'w$, $y \in w(v'u_1u_2u'v'w)^*$ mit $u_1, u_2, w \in \Sigma^*$ und $u \in u_1(u_2u_1)^*$. Auch hier unterscheiden wir, wie in Fall 4, den Fall $u_1u_2 = u^r$ für ein $r \in \mathbb{N}_1$ (Fall 5.1) und den Fall $u_1 = u'$, $u_2 \in \Sigma^* \setminus u^*$ (Fall 5.2).
Fall 5.1: Es gilt

$$x = wv'u_1u_2 = wv'u^r,$$
$$z = u_2u_1v'w = u^rv'w.$$

Analog zu Fall 4.1 folgt $w \in u^r(v'u^r)^*$ und somit $x, y \in \{u, v\}^*$.
Fall 5.2: Es gilt

$$x = wv'u_1u_2 = w\,v'u'\,u_2,$$
$$z = u_2u_1v'w = u_2\,u'v'\,w.$$

Dieser Fall verläuft analog zu Fall 4.3, es folgt ebenfalls $x, y \in \{u, v\}^*$. □

Anhand des eben bewiesenen Lemmas lässt sich nun der Beweis von Lemma 3.5 zu unseren Zwecken umbauen:

Proposition 3.11 *Die Wortgleichung* $\eta_1 \equiv X\,\texttt{aabc}\,Y = Y\,\texttt{bcaa}\,X$ *ist nicht parametrisierbar.*

Beweis: Für diesen Beweis genügt es, den Beweis von Lemma 3.5 zu erweitern. Hierzu definieren wir einen Homomorphismus

$$\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^* \text{ mit } \varphi(x) = \begin{cases} \texttt{aa} & \text{falls } x = \texttt{a}, \\ \texttt{bc} & \text{falls } x = \texttt{b} \end{cases}$$

und betrachten anstelle des Fibonacci-Wortes F das Wort $\varphi(F)$.

Offensichtlich ist φ injektiv. Wie bereits im Beweis zu Lemma 3.5 erwähnt wurde, existiert nach [Kar83] kein $w \in \Sigma^+$, für das w^4 ein Faktor von F ist. Da $\varphi(\texttt{a}) = \texttt{aa}$ und $\varphi(\texttt{b}) = \texttt{bc}$ keine gemeinsamen Buchstaben besitzen kann φ abgesehen von $\varphi(\texttt{aa})$ keine neuen Wortquadrate (-tripel, ...) einführen. Es existiert also kein $w \in \Sigma^* \setminus \{\texttt{a}\}$, für das w^4 ein Faktor von $\varphi(F)$ ist. Aus dem rekursiven Aufbau von F ist leicht zu erkennen, dass F zwar Faktoren der Form $\texttt{a}^2$, jedoch aber keinen Faktor der Form $\texttt{a}^3$ besitzt; dies liegt daran, dass für alle $n \geq 2$ die F_n mit $\texttt{ab}$ beginnen und mit $\texttt{ba}$ enden. Also enthält $\varphi(F)$ zwar Faktoren der Form $\varphi(\texttt{a}^2) = \texttt{a}^4$, aber keinen Faktor der Form $\varphi(\texttt{a}^3) = \texttt{a}^6$ und somit auch keinen Faktor der Form $\texttt{a}^5$. Also ist für kein $w \in \Sigma^+$ das Wort w^5 ein Faktor von $\varphi(F)$.

Weiterhin ist $\langle X ::= \varphi(G_{2n+1}),\ Y ::= \varphi(G_{2n})\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}_1$ eine Lösung von η_1. Aus Lemma 3.10 folgt außerdem, dass alle Lösungen von η_1 aus Wörtern aus $\{\texttt{a}, \texttt{bc}\}^*$ bestehen. Es kann also analog zum Beweis von Lemma 3.5 argumentiert werden. □

Da es nicht möglich, ist η_1 zu parametrisieren, stellt sich die Frage, wie bei einer Charakterisierung der möglichen Lösungen weiter vorzugehen ist. Eine Möglichkeit wäre es, alle Lösungen der Wortgleichung $X\,uv\,Y = Y\,vu\,Z$ zu finden, bei denen $X = Z$ gilt. Diesen Ansatz haben wir bereits im Beweis zu Lemma 3.10 teilweise verfolgt, auf diese Art werden aber die Y-Werte der Lösungen schnell lang und lassen sich nur noch schwer übersichtlich darstellen. Stattdessen gehen wir hier analog zu Proposition 3.9 vor:

Lemma 3.12 *Sei* Π_1 *wie folgt definiert:*

1. $\langle X ::= \texttt{a}^n,\ Y ::= \texttt{a}^{n+2}\rangle \in \Pi_1$,

2. $\langle X ::= (\texttt{bc})^{n+1},\ Y ::= (\texttt{bc})^n \rangle \in \Pi_1$,

3. $\langle X ::= \texttt{a}(\texttt{bca})^{n+1},\ Y ::= \texttt{a}(\texttt{bca})^n \rangle \in \Pi_1$,

4. Aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y \rangle \in \Pi_1$ *folgt* $\langle X ::= y\,\texttt{bcaa}\,x,\ Y ::= y \rangle \in \Pi_1$,

5. Aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y \rangle \in \Pi_1$ *folgt* $\langle X ::= x,\ Y ::= x\,\texttt{aabc}\,y \rangle \in \Pi_1$.

Dann ist Π_1 *eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung* $\eta_1 \equiv X\,\texttt{aabc}\,Y = Y\,\texttt{bcaa}\,X$.

Beweis: Zu zeigen sind Vollständigkeit und Korrektheit von Π_1.
Vollständigkeit: Seien $x, y \in \Sigma^*$ mit $\langle X ::= x,\ Y ::= y \rangle \in \Gamma(\eta_1)$. Wieder einmal gilt $|x| \neq |y|$ wieder einmal unterscheiden wir die beiden Fälle $|x| > |y|$ (Fall 1) und $|y| > |x|$ (Fall 2).
Fall 1: Da $|x| > |y$ existiert ein $x_1 \in \Sigma^*$ mit $x = y\,\texttt{bc}\,x_1$, außerdem gilt

$$\begin{aligned} & x\,\texttt{aabc}\,y = y\,\texttt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & y\,\texttt{bc}\,x_1\,\texttt{aabc}\,y = y\,\texttt{bcaa}\,y\,\texttt{bc}\,x_1 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1\,\texttt{aabc}\,y = \texttt{aa}\,y\,\texttt{bc}\,x_1. \end{aligned}$$

Nun unterscheiden wir die Fälle $x_1 = \lambda$ (Fall 1.1) und $x_1 = \texttt{a}\,x_2$ für ein $x_2 \in \Sigma^*$ (Fall 1.2).
Fall 1.1: Gilt $x_1 = \lambda$ so folgt daraus

$$\begin{aligned} & x_1\,\texttt{aabc}\,y = \texttt{aa}\,y\,\texttt{bc}\,x_1 \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{aabc}\,y = \texttt{aa}\,y\,\texttt{bc} \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{bc}\,y = y\,\texttt{bc}. \end{aligned}$$

Dies gilt genau dann wenn $y = (\texttt{bc})^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, somit gilt $x = y\,\texttt{bc}\,x_1 = y\,\texttt{bc} = (\texttt{bc})^{n+1}$, alle Lösungen dieser Form werden von Regel 2 beschrieben.
Fall 1.2: Gilt $x_1 = \texttt{a}\,x_2$ so folgt daraus

$$\begin{aligned} & x_1\,\texttt{aabc}\,y = \texttt{aa}\,y\,\texttt{bc}\,x_1 \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{a}\,x_2\,\texttt{aabc}\,y = \texttt{aa}\,y\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2\,\texttt{aabc}\,y = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,x_2. \end{aligned}$$

Auch hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $x_2 = \lambda$ und $x_2 = \texttt{a}x_3$ für ein $x_3 \in \Sigma^*$.
Fall 1.2.1: Gilt $x_2 = \lambda$ so folgt daraus

$$\begin{aligned} & x_2\,\texttt{aabc}\,y = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{aabc}\,y = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca} \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{abc}\,y = y\,\texttt{bca}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2 gilt dies genau dann wenn $y = \texttt{a}(\texttt{bca})^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $x = y\,\texttt{bc}\,x_1 = y\,\texttt{bca}\,x_2 = y\,\texttt{bca} = \texttt{a}(\texttt{bca})^{n+1}$. Lösungen dieser Form werden

von Regel 3 erzeugt.
Fall 1.2.2: Gilt $x_2 = \mathtt{a}x_3$ so folgt daraus

$$\begin{aligned} & x_2\,\mathtt{aabc}\,y = \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{a}x_3\,\mathtt{aabc}\,y = \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,\mathtt{a}x_3 \\ \Leftrightarrow\quad & x_3\,\mathtt{aabc}\,y = y\,\mathtt{bca}\,\mathtt{a}x_3. \end{aligned}$$

Es gilt $\langle X ::= x_3,\ Y ::= y\rangle \in \Gamma(\eta_1)$ und somit $x = y\mathtt{bcaa}\,x_3$; Lösungen dieser Form werden von Regel 4 behandelt.
Fall 2: Da $|y| > |x|$ existiert ein $y' \in \Sigma^*$ mit $y = x\,\mathtt{a}\,y'$. Es gilt

$$\begin{aligned} & x\,\mathtt{aabc}\,\underline{y} = \underline{y}\,\mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & \underline{x\mathtt{a}}\mathtt{abc}\,x\mathtt{a}y' = \underline{x\mathtt{a}}y'\,\mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{abc}\,x\mathtt{a}y' = y'\,\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Also existiert ein $y_1 \in \Sigma^*$ mit $y' = \mathtt{a}y_1$ und somit $y = x\,\mathtt{aa}\,y_1$. Daher gilt

$$\begin{aligned} & x\,\mathtt{aabc}\,y = y\,\mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & x\,\mathtt{aabc}\,x\,\mathtt{aa}y_1 = x\,\mathtt{aa}y_1\,\mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{bc}\,x\,\mathtt{aa}y_1 = y_1\,\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Wiederum sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $y_1 = \lambda$ und $y_1 = \mathtt{bc}\,y_2$ für ein $y_2 \in \Sigma^*$
Fall 2.1: Aus $y_1 = \lambda$ folgt

$$\begin{aligned} & \mathtt{bc}\,x\,\mathtt{aa}y_1 = y_1\,\mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{bc}\,x\,\mathtt{aa} = \mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & x\,\mathtt{aa} = \mathtt{aa}\,x. \end{aligned}$$

Demnach gilt $x = \mathtt{a}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und somit $y = x\,\mathtt{aa}y_1 = \mathtt{a}^{n+2}y_1 = \mathtt{a}^{n+2}$. Lösungen dieser Form werden von Regel 1 erzeugt.
Fall 2.2: Aus $y_1 = \mathtt{bc}\,y_2$ folgt

$$\begin{aligned} & \mathtt{bc}\,x\,\mathtt{aa}y_1 = y_1\,\mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{bc}\,x\,\mathtt{aabc}\,y_2 = \mathtt{bc}\,y_2\mathtt{bcaa}\,x \\ \Leftrightarrow\quad & x\,\mathtt{aabc}\,y_2 = y_2\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Es gilt $\langle X ::= x, Y ::= y_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$ und somit $y = x\,\mathtt{aa}y_1 = x\,\mathtt{aabc}\,y_2$. Lösungen dieser Form werden von Regel 5 erzeugt.
Korrektheit: Wie gewohnt führen wir diesen Beweis durch eine strukturelle Induktion über alle verwendeten Regeln.
Regel 1: Sei $x = \mathtt{a}^n$, $y = \mathtt{a}^{n+2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{aabc}\,y &= \mathtt{a}^n\,\mathtt{aabc}\,\mathtt{a}^{n+2} \\ &= \mathtt{a}^{n+2}\,\mathtt{bcaa}\,\mathtt{a}^n \\ &= y\,\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Regel 2: Sei $x = (\mathtt{bc})^{n+1}$, $y = (\mathtt{bc})^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{aabc}\,y &= (\mathtt{bc})^{n+1}\,\mathtt{aabc}\,(\mathtt{bc})^n \\ &= (\mathtt{bc})^n\,\mathtt{bcaa}\,(\mathtt{bc})^{n+1} \\ &= y\,\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Regel 3: Sei $x = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^{n+1}$, $y = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{aabc}\,y &= \mathtt{a}(\mathtt{bca})^{n+1}\,\mathtt{aabc}\,\mathtt{a}(\mathtt{bca})^n \\ &= \mathtt{a}(\mathtt{bca})^n\,\mathtt{bca}\,\mathtt{a}\,\mathtt{abca}(\mathtt{bca})^n \\ &= y\,\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Regel 4: Seien $\langle X ::= x',\ Y ::= y\rangle \in \Pi_1$ Lösungen von η_1 und $x = y\,\mathtt{bcaa}\,x'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{aabc}\,y &= y\,\mathtt{bcaa}\,x'\,\mathtt{aabc}\,y \\ &= y\,\mathtt{bcaa}\,y\,\mathtt{bcaa}\,x' \\ &= y\,\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Regel 5: Seien $\langle X ::= x,\ Y ::= y'\rangle \in \Pi_1$ Lösungen von η_1 und $y = x\,\mathtt{aabc}\,y'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{aabc}\,y &= x\,\mathtt{aabc}\,x\,\mathtt{aabc}\,y' \\ &= x\,\mathtt{aabc}\,y'\,\mathtt{bcaa}\,x \\ &= y'\,\mathtt{bcaa}\,x. \end{aligned}$$

Π_1 erzeugt also alle Lösungen von η_1 und nur diese, damit ist Π_1 eine parametrische Darstellung von $\Gamma(\eta_1)$. $\square$

Lemma 3.10 legt den Verdacht nahe, dass die Lösungen von η_1 und η_2 eine gewisse strukturelle Ähnlichkeit besitzen. Diese Erkenntnis lässt sich verwenden, um die Gleichung η_2 auf η_1 zu reduzieren und die parametrische Beschreibung Π_1 von η_1 auf eine parametrische Beschreibung Π_2 von η_2 abzubilden:

Lemma 3.13 *Seien $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \Sigma^+$ unperiodisch, u_1 und v_1 sowie u_2 und v_2 stark überlappungsfrei, $m, n \in \mathbb{N}_1$, außerdem seien*

$$\begin{aligned} \zeta_1 &\equiv X\,u_1^m v_1^n\,Y = Y\,v_1^n u_1^m\,X, \\ \zeta_2 &\equiv X\,u_2^m v_2^n\,Y = Y\,v_2^n u_2^m\,X \end{aligned}$$

Wortgleichungen mit Variablen aus $\Xi = \{X, Y\}$. Sei $h : \{u_1, v_1\}^* \to \{u_2, v_2\}^*$ ein Homomorphismus mit $h(u_1) = u_2$ und $h(v_1) = v_2$, $k : \{u_2, v_2\}^* \to \{u_1, v_1\}^*$ ein Homomorphismus mit $k(u_2) = u_1$ und $k(v_2) = v_1$ und seien $x, y \in \Sigma^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle \in \Gamma(\zeta_1) \Leftrightarrow \langle X ::= h(x),\ Y ::= h(y)\rangle \in \Gamma(\zeta_2) \\ \textit{und}\quad &\langle X ::= k(x),\ Y ::= k(y)\rangle \in \Gamma(\zeta_1) \Leftrightarrow \langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle \in \Gamma(\zeta_2). \end{aligned}$$

Beweis: Nach Lemma 3.10 folgt, dass für alle $x, y \in \Sigma^*$ aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle \in \Gamma(\zeta_1)$ stets $x, y \in \{u_1, v_1\}^*$ und aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle \in \Gamma(\zeta_2)$ stets $x, y \in \{u_2, v_2\}^*$ folgt. Somit sind h und k wohldefiniert. Zudem sind nach Proposition 2.4 die beiden Mengen $\{u_1, v_1\}$ und $\{u_2, v_2\}$ Codes und somit die von ihnen erzeugten Monoiden frei – h und k sind also bijektive Homomorphismen zwischen $\{u_1, v_1\}^*$ und $\{u_2, v_2\}^*$. Seien nun $x, y \in \Sigma^*$ mit $x\, u_1^m v_1^n\, y = y\, v_1^n u_1^m\, x$. Dann gilt

$$\begin{array}{lc} & x\, u_1^m v_1^n\, y = y\, v_1^n u_1^m\, x \\ \Rightarrow & h(x\, u_1^m v_1^n\, y) = h(y\, v_1^n u_1^m\, x) \\ \Rightarrow & h(x)\ h(u_1^m v_1^n)\ h(y) = h(y)\ h(v_1^n u_1^m)\ h(x) \\ \Rightarrow & h(x)\ u_2^m v_2^n\ h(y) = h(y)\ v_2^n u_2^m\ h(x) \end{array}$$

und außerdem die Rückrichtung

$$\begin{array}{lc} & h(x)\ u_2^m v_2^n\ h(y) = h(y)\ v_2^n u_2^m\ h(x) \\ \Rightarrow & k(h(x)\ u_2^m v_2^n\ h(y)) = k(h(y)\ v_2^n u_2^m\ h(x)) \\ \Rightarrow & k(h(x))\ k(u_2^m v_2^n)\ k(h(y)) = k(h(y))\ k(v_2^n u_2^m)\ k(h(x)) \\ \Rightarrow & x\, u_1^m v_1^n\, y = y\, v_1^n u_1^m\, x. \end{array}$$

Der Beweis zur zweiten Behauptung verläuft analog. □

Tatsächlich sind also alle Lösungen von Gleichungen der Form $X\ u^m v^n\ Y = Y\ v^n u^m\ X$ ($u, v \in \Sigma^*$ stark überlappungsfrei und unperiodisch, $m, n \in \mathbb{N}_1$) für feste m, n strukturell gesehen gleich, ganz unabhängig von der Länge der gewählten u und v. Damit ist auch klar, dass η_2 ebenfalls nicht parametrisierbar sein kann; ansonsten wäre nämlich auch η_1 parametrisierbar. Wir verharren einen Moment in stiller Freude über diese Erkenntnis und wenden sie sogleich an:

Lemma 3.14 *Sei Π_2 wie folgt definiert:*

1. $\left\langle X ::= \mathtt{a}^n,\ Y ::= \mathtt{a}^{n+1}\right\rangle \in \Pi_2$,
2. $\left\langle X ::= (\mathtt{bc})^{n+2},\ Y ::= (\mathtt{bc})^n\right\rangle \in \Pi_2$,
3. $\left\langle X ::= \mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n,\ Y ::= \mathtt{bc}(\mathtt{abc})^{n+1}\right\rangle \in \Pi_2$,
4. *Aus* $\langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle \in \Pi_2$ *folgt* $\langle X ::= y\,\mathtt{bcbca}\,x,\ Y ::= y\rangle \in \Pi_2$,
5. *Aus* $\langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle \in \Pi_2$ *folgt* $\langle X ::= x,\ Y ::= x\,\mathtt{abcbc}\,y\rangle \in \Pi_2$.

Dann ist Π_2 eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung $\eta_2 \equiv X\,\mathtt{abcbc}\,Y = Y\,\mathtt{bcbca}\,X$.

Beweis: Sei $\Sigma_2 = \{\mathtt{a}, \mathtt{bc}\}$ und Σ_2^* der von Σ_2 erzeugt freie Monoid. Sei $h : \Sigma_2^* \to \Sigma_2^*$ eine Abbildung mit $h(\mathtt{a}) = \mathtt{bc}$ und $h(\mathtt{bc}) = \mathtt{a}$. Nach Lemma 3.13 können wir nun die in Proposition 3.12 gewonnene parametrische Beschreibung der Lösungen von η_1 durch h in eine parametrische Beschreibung der Lösungen von η_2 konvertieren.

Es $\langle X ::= x,\, Y ::= y\rangle \in \Gamma(\eta_1)$ genau dann wenn $\langle X ::= h(y),\, Y ::= h(x)\rangle \in \Gamma(\eta_2)$. Das ‚Vertauschen' der X- und der Y-Lösung ist dabei notwendig, da $h(x\mathtt{aabc}y = y\mathtt{bcaa}x) \equiv X\mathtt{bcbca}Y = Y\mathtt{abcbc}X$; die Reihenfolge der Variablen ist also bei $h(\eta_1)$ im Vergleich zu η_2 ebenfalls vertauscht.
Wir wenden nun also h auf jede der Regeln von Π_2 an und zeigen dann, dass es jeweils eine eindeutiges Gegenstück in Π_1 gibt.
Regel 1: Sei $x = \mathtt{a}^n$, $y = \mathtt{a}^{n+1}$; es gilt $\langle X ::= x,\, Y ::= y\rangle \in \Pi_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= h(\mathtt{a}^n) = h(\mathtt{a})^n = (\mathtt{bc})^n, \\ h(y) &= h\left(\mathtt{a}^{n+1}\right) = h(\mathtt{a})^{n+1} = (\mathtt{bc})^{n+1}. \end{aligned}$$

Also entspricht Regel 1 von Π_2 Regel 2 von Π_1.
Regel 2: Sei $x = (\mathtt{bc})^{n+2}$, $y = (\mathtt{bc})^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= h\left((\mathtt{bc})^{n+2}\right) = (h(\mathtt{bc}))^{n+2} = a^{n+2}, \\ h(y) &= h\left((\mathtt{bc})^{n}\right) = (h(\mathtt{bc}))^{n} = a^{n}. \end{aligned}$$

Also entspricht Regel 2 von Π_2 Regel 1 von Π_1.
Regel 3: Es sei $x = \mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n$, $y = \mathtt{bc}(\mathtt{abc})^{n+1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(x) &= h\left(\mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n\right) = h(\mathtt{bc})\, h\left((\mathtt{abc})^n\right) \\ &= \mathtt{a}\left(h(\mathtt{abc})\right)^n = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^n, \\ h(y) &= h(\mathtt{bc}(\mathtt{abc})^{n+1}) \\ &= h(\mathtt{bc})\, h\left((\mathtt{abc})^{n+1}\right) \\ &= h(\mathtt{bc})\left(h(\mathtt{abc})\right)^{n+1} \\ &= \mathtt{a}(\mathtt{bca})^{n+1}. \end{aligned}$$

Also entspricht Regel 3 von Π_2 Regel 3 von Π_1.
Regel 4: Aus $\langle X ::= x,\, Y ::= y\rangle \in \Pi_2$ folgt $\langle X ::= h(y),\, Y ::= h(x)\rangle \in \Pi_1$, aus $\langle X ::= y\,\mathtt{bcbca}\,x,\, Y ::= y\rangle \in \Pi_2$ folgt $\langle X ::= h(y),\, Y ::= h(y\,\mathtt{bcbca}\,x)\rangle \in \Pi_1$ mit

$$\begin{aligned} h\left(y\,\mathtt{bcbca}\,x\right) &= h(y)\, h(\mathtt{bcbca})\, h(x), \\ &= h(y)\,\mathtt{aabc}\,h(x). \end{aligned}$$

Also entspricht Regel 4 von Π_2 Regel 5 von Π_1.
Regel 5: Da $h(\mathtt{bcbca}) = \mathtt{aabc}$ entspricht Regel 5 von Π_2 Regel 4 von Π_1.
Da Π_1 vollständig und korrekt die Lösungen von η_1 beschreibt und Π_2 durch h aus Π_1 entstanden ist, beschreibt Π_2 vollständig und korrekt die Lösungen von η_2. □

Die nächsten vier Propositionen versuchen, aus den vorigen zwei Lemmata um jeden Preis noch Resultate herauszupressen, indem die Gleichungen geringfügig abgewandelt und dann doch wieder auf η_1 oder η_2 reduziert werden. Das ist zwar nicht gerade spannend, aber leider notwendig für spätere Ergebnisse.

Proposition 3.15 *Sei* Π_3 *wie folgt definiert:*

1. $\langle X ::= \lambda,\, Y ::= \mathtt{a}(\mathtt{bca})^n\rangle \in \Pi_3$,
2. $\langle X ::= \mathtt{a}s_1,\, Y ::= s_2\rangle \in \Pi_3$ *für alle* $\langle X ::= s_1,\, Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$.

Dann ist Π_3 *eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung* $\eta_3 \equiv X\,\mathtt{aabc}\,Y = \mathtt{a}\,Y\,\mathtt{bca}\,X$.

Beweis: Zuerst zeigen wir die Vollständigkeit von Π_3. Seien $x, y \in \Sigma^*$, so dass $\langle X ::= x,\, Y ::= y\rangle$ eine Lösung von η_3 ist.
Fall 1: Gilt $x = \lambda$ folgt daraus $\mathtt{aabc}\,y = \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}$ und somit $\mathtt{abc}\,y = y\,\mathtt{bca}$. Nach Lemma 3.2 gilt $y = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dieser Fall wird von Regel 1 abgedeckt.
Fall 2: Gilt $|x| > 0$, so existiert ein $x_1 \in \Sigma^*$ mit $x = \mathtt{a}x_1$. Daraus folgt dann $x_1\,\mathtt{aabc}\,y = y\,\mathtt{bcaa}\,x_1$. Es gilt also $\langle X ::= x_1,\, Y ::= y\rangle \in \Gamma(\eta_1)$ – ein Fall für Regel 2.

Nun zur Korrektheit, zuerst Regel 1. Sei $x = \lambda$, $y = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{aabc}\,y &= \mathtt{aa}\underline{\mathtt{bc}\,\mathtt{a}(\mathtt{bca})^n} \\ &= \mathtt{a}\underline{\mathtt{a}\,(\mathtt{bca})^n}\mathtt{bca} \\ &= \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,\lambda \\ &= \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,x. \end{aligned}$$

Schließlich noch Regel 2 – seien $\langle X ::= x',\, Y ::= y\rangle \in \Gamma(\eta_1)$, $x = \mathtt{a}x'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{aabc}\,y &= \mathtt{a}\underline{x'\,\mathtt{aabc}\,y} \\ &= \mathtt{a}\,y\mathtt{bcaa}\underline{\mathtt{a}x'} && (\text{da } \langle X ::= x',\, Y ::= y\rangle \in \Gamma(\eta_1)) \\ &= \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,x \end{aligned}$$

□

Zu der Gleichung η_3 existiert ein Pendant, das durch Vertauschen von $\mathtt{aa}$ und $\mathtt{bc}$ entsteht:

Proposition 3.16 *Sei* Π_4 *wie folgt definiert:*

1. $\langle X ::= \lambda,\, Y ::= \mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n \in \Pi_4$,
2. $\langle X ::= \mathtt{bc}s_2,\, Y ::= s_1\rangle \in \Pi_4$ *für alle* $\langle X ::= s_1,\, Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$.

Dann ist Π_4 eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung $\eta_4 \equiv X\,\texttt{bcbca}\,Y = \texttt{bc}\,Y\,\texttt{abc}\,X$.

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition 3.15. □

Wir variieren η_3 ein weiteres Mal, indem wir auch das andere Vorkommen von Y ins Innere des Gleichungsteils ziehen:

Proposition 3.17 *Sei Π_5 wie folgt definiert:*

1. $\langle X ::= \lambda,\ Y ::= (\texttt{bc})^n\rangle \in \Pi_5$,
2. $\langle X ::= \texttt{a},\ Y ::= \texttt{a}(\texttt{bca})^n\rangle \in \Pi_5$,
3. $\langle X ::= \texttt{a}s_1\texttt{a},\ Y ::= s_2\rangle \in \Pi_5$ *für alle* $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$.

Dann ist Π_5 eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung $\eta_5 \equiv X\,\texttt{abc}\,Y\,\texttt{a} = \texttt{a}\,Y\,\texttt{bca}\,X$.

Beweis: Zu zeigen sind Vollständigkeit und Korrektheit von Π_5.

Vollständigkeit: Seien $x, y \in \Sigma^*$ mit $\langle X ::= x,\ Y ::= y\rangle \in \Gamma(\eta_5)$. Wieder einmal sind zwei Fälle zu unterscheiden:
Fall 1: Angenommen, es gilt $x = \lambda$. Dann gilt

$$\begin{array}{lll} & x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,x & \\ \Leftrightarrow & \texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca} & \\ \Leftrightarrow & \texttt{bc}\,y = y\,\texttt{bc} & \\ \Leftrightarrow & y = (\texttt{bc})^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. & \text{(nach Lemma 2.2)} \end{array}$$

Also gilt $x = \lambda$, $y = (\texttt{bc})^n$, dieser Fall wird von Regel 1 erfasst.
Fall 2: Ist $|x| > 0$, so existiert ein $x_1 \in \Sigma^*$ mit $x = \texttt{a}x_1$. Es gilt

$$\begin{array}{ll} & x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,x \\ \Leftrightarrow & \texttt{a}\,x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = \texttt{a}\,y\,\texttt{bcaa}\,x_1 \\ \Leftrightarrow & x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = y\,\texttt{bcaa}\,x_1. \end{array}$$

Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle.
Fall 2.1: Angenommen, es gilt $x_1 = \lambda$. Dann folgt

$$\begin{array}{lll} & x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = y\,\texttt{bcaa}\,x_1 & \\ \Leftrightarrow & \texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = y\,\texttt{bcaa} & \\ \Leftrightarrow & \texttt{abc}\,y = y\,\texttt{bca} & \\ \Leftrightarrow & y = \texttt{a}(\texttt{bca})^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. & \text{(nach Lemma 2.2)} \end{array}$$

Somit gilt $x = \texttt{a}x_1 = \texttt{a}$, $y = \texttt{a}(\texttt{bca})^n$; diese Lösungen werden von Regel 2 erfasst.
Fall 2.2: Gilt $|x_1| > 0$ so existiert ein $x_2 \in \Sigma^*$ mit $x_1 = x_2\texttt{a}$. Es gilt

$$\begin{array}{ll} & x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{a} = y\,\texttt{bcaa}\,x_1 \\ \Leftrightarrow & x_2\,\texttt{aabc}\,y\,\texttt{a} = y\,\texttt{bcaa}\,x_2\,\texttt{a} \\ \Leftrightarrow & x_2\,\texttt{aabc}\,y = y\,\texttt{bcaa}\,x_2. \end{array}$$

Daher muss $\langle X ::= x_2,\ Y ::= y\rangle \in \Gamma(\eta_1)$ gelten, somit gilt $x = \mathtt{a}x_1 = \mathtt{a}x_2\mathtt{a}$, Lösungen dieser Form werden von Regel 3 erfasst.
Korrektheit: Wir betrachten die Korrektheit Regel für Regel.

Regel 1: Sei $x = \lambda$, $y = (\mathtt{bc})^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{abc}\,y\,\mathtt{a} &= \mathtt{abc}\,(\mathtt{bc})^n\,\mathtt{a} \\ &= \mathtt{a}\,(\mathtt{bc})^n\,\mathtt{bca}\,\lambda \\ &= \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,x. \end{aligned}$$

Regel 2: Sei $x = \mathtt{a}$, $y = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{abc}\,y\,\mathtt{a} &= \mathtt{a}\,\underline{\mathtt{abc}\,\mathtt{a}(\mathtt{bca})^n}\,\mathtt{a} \\ &= \mathtt{a}\underline{\mathtt{a}\,(\mathtt{bca})^n}\mathtt{bca}\,\underline{\mathtt{a}} \\ &= \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,x. \end{aligned}$$

Regel 3: Seien $s_1, s_2 \in \Sigma^*$ mit $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$, $x = \mathtt{a}s_1\mathtt{a}$, $y = s_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\mathtt{abc}\,y\,\mathtt{a} &= \mathtt{a}\underline{s_1\mathtt{a}\,\mathtt{abc}\,s_2}\,\mathtt{a} \\ &= \mathtt{a}\,\underline{s_2}\mathtt{bca}\underline{\mathtt{a}s_1\mathtt{a}} && (\text{da } \langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)) \\ &= \mathtt{a}\,y\,\mathtt{bca}\,x. \end{aligned}$$

Also beschreibt Π_5 alle Lösungen von η_5, und nur diese. □

Das bereits bekannte Vertauschen von $\mathtt{aa}$ und $\mathtt{bc}$ erzeugt eine weitere Gleichung, die letzte der vier Variationen von η_1 und η_2.

Proposition 3.18 *Sei* Π_6 *wie folgt definiert:*

1. $\langle X ::= \lambda,\ Y ::= \mathtt{a}^n\rangle \in \Pi_6$,
2. $\langle X ::= \mathtt{bc},\ Y ::= \mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n\rangle \in \Pi_6$,
3. $\langle X ::= \mathtt{bc}s_2\mathtt{bc},\ Y ::= s_1\rangle \in \Pi_6$ *für alle* $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$.

Dann ist Π_6 *eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung* $\eta_6 \equiv X\,\mathtt{bca}\,Y\,\mathtt{bc} = \mathtt{bc}\,Y\,\mathtt{abc}\,X$.

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition 3.17. □

Nun aber halten wir uns nicht weiter mit endlosen Variationen der selben Gleichungen auf, sondern generalisieren ein weiteres Mal, indem wir eine dritte Variable hinzufügen. Noch ist die Struktur von Mau nicht zu erkennen, allerdings sind wir nur noch zwei weitere Resultate vom Ziel entfernt.

Proposition 3.19 *Sei* Π_7 *wie folgt definiert:*

1. $\langle X ::= \mathtt{a}^m,\ Y ::= \mathtt{a}^n,\ Z ::= \mathtt{a}^{m+1}\rangle \in \Pi_7$,

2. $\langle X ::= (\texttt{bc})^{m+1},\ Y ::= (\texttt{bc})^n,\ Z ::= (\texttt{bc})^m\rangle \in \Pi_7$,

3. $\langle X ::= s_2,\ Y ::= (s_1\texttt{bca})^n s_1\texttt{bc},\ Z ::= s_2\texttt{abc}s_1\rangle \in \Pi_7$
für alle $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_4)$,

4. $\langle X ::= s_2\texttt{bca}s_1,\ Y ::= (s_1\texttt{abc})^n s_1\texttt{a},\ Z ::= s_2\rangle \in \Pi_7$
für alle $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_3)$,

5. $\langle X ::= s_1,\ Y ::= (s_2\texttt{abca})^n s_2,\ Z ::= s_1\texttt{abc}s_2\texttt{a}\rangle \in \Pi_7$
für alle $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_5)$,

6. $\langle X ::= s_1\texttt{bca}s_2\texttt{bc},\ Y ::= (s_2\texttt{bcabc})^n s_2,\ Z ::= s_1\rangle \in \Pi_7$
für alle $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_6)$,

7. Aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y,\ Z ::= z\rangle \in \Pi_7$
folgt $\langle X ::= x,\ Y ::= (y\texttt{abc}z\texttt{bca})^n y,\ Z ::= x\texttt{abc}y\texttt{abc}z\rangle \in \Pi_7$,

8. Aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y,\ Z ::= z\rangle \in \Pi_7$
folgt $\langle X ::= z\texttt{bca}y\texttt{bca}x,\ Y ::= (y\texttt{bca}x\texttt{abc})^n y,\ Z ::= z\rangle \in \Pi_7$.

Dann ist Π_7 *eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung* $\eta_7 \equiv X\,\texttt{abc}\,Y\,\texttt{abc}\,Z = Z\,\texttt{bca}\,Y\,\texttt{bca}\,X$.

Beweis: Zu zeigen sind Vollständigkeit und Korrektheit von Π_7.
Vollständigkeit: Seien $x, y, z \in \Sigma^*$ mit $x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = z\,\texttt{bca}\,y\,\texttt{bca}\,x$. Es gilt entweder $|x| > |z|$ (Fall 1) oder $|x| < |z|$ (Fall 2).
Fall 1: Gilt $|x| > |z|$, so existiert ein $x_1 \in \Sigma^*$ mit $x = z\texttt{bc}x_1$. Dann gilt

$$\begin{array}{rc} & x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = z\,\texttt{bca}\,y\,\texttt{bca}\,x \\ \Leftrightarrow & z\texttt{bc}x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = z\,\texttt{bca}\,y\,\texttt{bca}\,z\texttt{bc}x_1 \\ \Leftrightarrow & x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bc}\,x_1. \end{array}$$

Nun gilt entweder $x_1 = \lambda$ (Fall 1.1) oder $x_1 = \texttt{a}x_2$ für ein $x_2 \in \Sigma^*$ (Fall 1.2).
Fall 1.1: Aus $x_1 = \lambda$ folgt

$$\begin{array}{rc} & x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bc}\,x_1 \\ \Leftrightarrow & \texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bc} \\ \Leftrightarrow & \texttt{bc}\,y\,\texttt{abc}\,z = y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bc}. \end{array}$$

Diese Gleichung zerfällt in zwei Teilgleichungen, nämlich $\texttt{bc}y = y\texttt{bc}$ und $\texttt{bc}z = z\texttt{bc}$. Gemäß Lemma 2.2 gilt $y = (\texttt{bc})^n$, $z = (\texttt{bc})^m$ für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$ und somit $x = z\texttt{bc}x_1 = z\texttt{bc} = (\texttt{bc})^{m+1}$. Alle Lösungen dieser Form werden von Regel 2 erzeugt.
Fall 1.2: Aus $x_1 = \texttt{a}x_2$ folgt

$$\begin{array}{rc} & x_1\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bc}\,x_1 \\ \Leftrightarrow & \texttt{a}x_2\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow & x_2\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2. \end{array} \quad (8)$$

Angenommen, es gilt $|y| > |x_2| + 1$. Dann existiert ein $y' \in \Sigma^*$ mit $y = x_2\texttt{abc}y'$, daraus folgt

$$\begin{aligned} & x_2\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z = y\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2\,\texttt{abc}\,x_2\texttt{abc}y'\,\texttt{abc}\,z = x_2\texttt{abc}y'\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2\,\texttt{abc}y'\,\texttt{abc}\,z = y'\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2. \end{aligned}$$

In der Tat, diese Gleichung hat erschreckende Ähnlichkeit mit (8). Nicht ohne Grund: Gilt $|y'| > |x_2| + 1$, so lässt sich diese Zerlegung weiter und weiter durchführen, so dass schließlich ein $y_1 \in \Sigma^*$ mit $|y_1| \leq |x_2| + 1$ und $y = (x_2\texttt{abc})^{n_1}y_1$ für ein $n_1 \in \mathbb{N}_1$ existiert. Dann gilt

$$x_2\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = y_1\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2.$$

Allgemein lässt sich also zu jedem y ein $y_1 \in \Sigma^*$ finden, so dass $y = (x_2\texttt{abc})^n y_1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $|y_1| \leq |x_2|+1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, $|y_1| = |x_2|+1$ (Fall 1.2.1) und $|y_1| < |x_2|$ (Fall 1.2.2).

Fall 1.2.1: Aus $|y_1| = |x_2| + 1$ folgt $y_1 = x_2\texttt{a}$ und es gilt

$$\begin{aligned} & x_2\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = y_1\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2\,\texttt{abc}\,x_2\texttt{a}\,\texttt{abc}\,z = x_2\texttt{a}\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2\texttt{aabc}\,z = \texttt{a}\,z\,\texttt{bca}\,x_2. \end{aligned}$$

Somit gilt $\langle X ::= x_2,\, Y ::= z\rangle \in \Gamma(\eta_3)$, $x = z\texttt{bc}x_1 = z\texttt{bca}x_2$, $y = (x_2\texttt{abc})^n y_1 = (x_2\texttt{abc})^n x_2\texttt{a}$. Lösungen dieser Form werden von Regel 4 erzeugt.

Fall 1.2.2: Gilt $|x_2| > |y_1|$, so existiert ein $x_3 \in \Sigma^*$ mit $x_2 = y_1\texttt{bc}x_3$. Es gilt

$$\begin{aligned} & x_2\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = y_1\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,x_2 \\ \Leftrightarrow\quad & y_1\,\texttt{bc}\,x_3\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = y_1\,\texttt{bca}\,z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bc}\,x_3 \\ \Leftrightarrow\quad & x_3\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bc}\,x_3. \end{aligned}$$

Noch einmal sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $x_3 = \lambda$ (Fall 1.2.2.1) und $x_3 = \texttt{a}x_4$ für ein $x_4 \in \Sigma^*$ (Fall 1.2.2.2).

Fall 1.2.2.1: Aus $x_3 = \lambda$ folgt

$$\begin{aligned} & x_3\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bc}\,x_3 \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bc} \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{bc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bc}. \end{aligned}$$

Also gilt $\langle X ::= z,\, Y ::= y_1\rangle \in \Gamma(\eta_6)$ und außerdem $x = z\texttt{bca}x_2 = z\texttt{bca}y_1\texttt{bc}$, $y = (x_2\texttt{abc})^n y_1 = (y_1\texttt{bcabc})^n y_1$. Solche Lösungen werden von Regel 6 erzeugt.

Fall 1.2.2.2: Aus $x_3 = \texttt{a}x_4$ folgt

$$\begin{aligned} & x_3\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bc}\,x_3 \\ \Leftrightarrow\quad & \texttt{a}\,x_4\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = \texttt{a}\,z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bca}\,x_4 \\ \Leftrightarrow\quad & x_4\,\texttt{abc}\,y_1\,\texttt{abc}\,z = z\,\texttt{bca}\,y_1\,\texttt{bca}\,x_4. \end{aligned}$$

Damit gilt $\langle X ::= x_4,\ Y ::= y_1,\ Z ::= z\rangle \in \Gamma(\eta_7)$ und außerdem

$$\begin{aligned} x &= z\texttt{bc}x_1 \\ &= z\texttt{bca}x_2 \\ &= z\texttt{bca}y_1\texttt{bc}x_3 \\ &= z\texttt{bca}y_1\texttt{bca}x_4 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} y &= (x_2\texttt{abc})^n y_1 \\ &= (y\texttt{bc}x_3\texttt{abc})^n y_1 \\ &= (y_1\texttt{bca}x_4\texttt{abc})^n y_1. \end{aligned}$$

Die oben genannte Gleichung lässt sich nun weiter zerlegen, bis einer der Fälle eintritt, in denen nicht auf η_7 zurückgegriffen wird. Dieser Fall wird also von Regel 8 abgedeckt.
Fall 2: Von Fall 2 aus lassen sich x, y, z analog zu Fall 1 zerlegen; hier werden Regel 1 (statt Regel 2), Regel 3 (statt Regel 4), Regel 5 (statt Regel 6) und Regel 7 (statt Regel 8) verwendet.

Korrektheit: Wir zeigen zuerst, dass die Regeln 1 bis 6 korrekt sind, und dann, dass die Anwendungen der Regeln 7 und 8 die Korrektheit erhalten.
Regel 1: Sei $x = \texttt{a}^m$, $y = \texttt{a}^n$, $z = \texttt{a}^{m+1}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z &= \texttt{a}^m\ \texttt{abc}\ \texttt{a}^n\texttt{abc}\ \texttt{a}^{m+1} \\ &= \texttt{a}^{m+1}\ \texttt{bc}\ \texttt{a}^n\texttt{a}\,\texttt{bc}\ \texttt{a}\ \texttt{a}^m \\ &= z\ \texttt{bca}\ y\ \texttt{bca}\ x. \end{aligned}$$

Also gilt $\langle X ::= x,\ Y ::= y,\ Z ::= z\rangle \in \Gamma(\eta_7)$, Regel 1 ist korrekt.
Regel 2: Analog zu Regel 1.
Regel 3: Seien $s_1, s_2 \in \Sigma^*$ mit

$$\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_4) \tag{9}$$

und $x = s_2$, $y = (s_1\texttt{bca})^n s_1\texttt{bc}$ und $z = s_2\texttt{abc}s_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z &= s_2\ \texttt{abc}\ \underline{(s_1\texttt{bca})^n s_1\texttt{bc}\ \texttt{a}}\texttt{bc}\ s_2\texttt{abc}s_1 \\ &= s_2\texttt{abc}\ s_1\texttt{bca}(s_1\texttt{bca})^n\ \underline{\texttt{bc}s_2\texttt{abc}s_1} \\ &= \underline{s_2\texttt{abc}s_1}\texttt{bca}\underline{(s_1\texttt{bca})^n\ s_1\texttt{bc}}\texttt{bca}\underline{s_2} && \text{(wegen (9))} \\ &= z\ \texttt{bca}\ y\ \texttt{bca}\ x. \end{aligned}$$

Also gilt auch in diesem Fall $\langle X ::= x,\ Y ::= y,\ Z ::= z\rangle \in \Gamma(\eta_7)$, Regel 3 ist also ebenfalls korrekt.
Regel 4: Analog zu Regel 3.
Regel 5: Seien $s_1, s_2 \in \Sigma^*$ mit

$$\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_5) \tag{10}$$

und $x = s_1$, $y = (s_2\texttt{abca})^n s_2$, und $z = s_1\texttt{abc}s_2\texttt{a}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z &= s_1\ \texttt{abc}\ (s_2\texttt{abca})^n s_2\ \texttt{abc}\ \underline{s_1\texttt{abc}s_2\texttt{a}} \\
&= s_1\texttt{abc}\underline{(s_2\texttt{abca})^n s_2\texttt{abc a}}s_2\texttt{bca}\,s_1 \qquad \text{(wegen (10))} \\
&= \underline{s_1\texttt{abc}\ s_2\texttt{a}}\texttt{bca}\underline{(s_2\texttt{abca})^n\ s_2}\texttt{bca}\underline{s_1} \\
&= z\ \texttt{bca}\ y\ \texttt{bca}\ x.
\end{aligned}$$

Hier gilt ebenfalls $\langle X ::= x, Y ::= y, Z ::= z\rangle \in \Gamma(\eta_7)$; Regel 5 ist somit korrekt.
Regel 6: Analog zu Regel 5.
Regel 7: Seien $x', y', z' \in \Sigma^*$ mit

$$\langle X ::= x',\ Y ::= y',\ Z ::= z'\rangle \in \Gamma(\eta_7). \tag{11}$$

Sei $x = x'$, $y = (y'\texttt{abc}z'\texttt{bca})^n y'$ und $z = x'\texttt{abc}y'\texttt{abc}z'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,z &= x'\ \texttt{abc}\ (y'\texttt{abc}z'\texttt{bca})^n y'\ \texttt{abc}\ \underline{x'\texttt{abc}y'\texttt{abc}z'} \\
&= x'\texttt{abc}\underline{(y'\texttt{abc}z'\texttt{bca})^n y'\texttt{abc}\ z'}\texttt{bca}y'\texttt{bca}x' \qquad \text{(wegen (11))} \\
&= \underline{x'\texttt{abc}\ y'\texttt{abc}z'}\texttt{bca}\underline{(y'\texttt{abc}z'\texttt{bca})^n\ y'}\texttt{bca}\underline{x'} \\
&= z\ \texttt{bca}\ y\ \texttt{bca}\ x.
\end{aligned}$$

Also gilt $\langle X ::= x, Y ::= y, Z ::= z\rangle \in \Gamma(\eta_7)$, die Anwendung von Regel 7 erhält also die Korrektheit von Lösungen.
Regel 8: Analog zu Regel 7. Durch strukturelle Induktion folgt also, dass alle Elemente von Π_7 parametrische Lösungen von η_7 sind.
Alle von Π_7 erzeugten 3-Tupel sind also Lösungen von η_7, außerdem können alle Lösungen erzeugt werden – damit ist Π_7 eine parametrische Beschreibung von $\Gamma(\eta_7)$. □

Diese Darstellung lässt sich allerdings noch etwas vereinfachen, indem wir die in den Propositionen 3.15 bis 3.18 gewonnenen Ergebnisse aus den Innereien von $\Pi_{\{3,\ldots,6\}}$ emporziehen:

Kommentar 3.20 *Eine äquivalente Darstellung von Π_7 lautet wie folgt:*

1'. $\langle X ::= \texttt{a}^m,\ Y ::= \texttt{a}^n,\ Z ::= \texttt{a}^{m+1}\rangle \in \Pi_7,$

2'. $\langle X ::= (\texttt{bc})^{m+1},\ Y ::= (\texttt{bc})^n,\ Z ::= (\texttt{bc})^m\rangle \in \Pi_7,$

3'. $\langle X ::= \texttt{a}(\texttt{bca})^{m+1},\ Y ::= (\texttt{abc})^n\texttt{a},\ Z ::= \texttt{a}(\texttt{bca})^m\rangle \in \Pi_7,$

4'. $\langle X ::= \texttt{bc}(\texttt{abc})^m,\ Y ::= \texttt{bc}(\texttt{abc})^n,\ Z ::= \texttt{bc}(\texttt{abc})^{m+1}\rangle \in \Pi_7,$

5'. $\langle X ::= \lambda,\ Y ::= ((\texttt{bc})^m\texttt{abca})^n(\texttt{bc})^m,\ Z ::= \texttt{a}(\texttt{bc})^{m+1}\texttt{a}\rangle \in \Pi_7,$

6'. $\langle X ::= \texttt{bca}^{m+1}\texttt{bc},\ Y ::= (\texttt{a}^m\texttt{bcabc})^n\texttt{a}^m,\ Z ::= \lambda\rangle \in \Pi_7,$

7'. $\langle X ::= \texttt{a},\ Y ::= (\texttt{a}(\texttt{bca})^m\texttt{abca})^n\texttt{a}(\texttt{bca})^m,\ Z ::= \texttt{aa}(\texttt{bca})^{m+1}\texttt{a}\rangle \in \Pi_7,$

8'. $\langle X ::= \texttt{bcbc(abc)}^{m+1}\texttt{bc},\ Y ::= (\texttt{bc(abc)}^m\texttt{bcabc})^n\texttt{bc(abc)}^m,\ Z ::= \texttt{bc}\rangle \in \Pi_7$,

9'. $\langle X ::= t_1\texttt{aabc}t_2,\ Y ::= (\texttt{a}t_1\texttt{abc})^n\texttt{a}t_1\texttt{a},\ Z ::= t_2\rangle \in \Pi_7$ *für alle* $\langle X ::= t_1,\ Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$,

10'. $\langle X ::= t_1,\ Y ::= (\texttt{bc}t_2\texttt{bca})^n\texttt{bc}t_2\texttt{bc},\ Z ::= t_1\texttt{abcbc}t_2\rangle \in \Pi_7$ *für alle* $\langle X ::= t_1,\ Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$,

11'. $\langle X ::= \texttt{a}t_1\texttt{a},\ Y ::= (t_2\texttt{abca})^n t_2,\ Z ::= \texttt{a}t_1\texttt{aabc}t_2\texttt{a}\rangle \in \Pi_7$ *für alle* $\langle X ::= t_1,\ Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$,

12'. $\langle X ::= \texttt{bc}t_2\texttt{bcbca}t_1\texttt{bc},\ Y ::= (t_1\texttt{bcabc})^n t_1,\ Z ::= \texttt{bc}t_2\texttt{bc}\rangle \in \Pi_7$ *für alle* $\langle X ::= t_1,\ Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$,

13'. Aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y,\ Z ::= z\rangle \in \Pi_7$ *folgt*

$$\langle X ::= x,\ Y ::= (y\texttt{abc}z\texttt{bca})^n y,\ Z ::= x\texttt{abc}y\texttt{abc}z\rangle \in \Pi_7,$$

14'. Aus $\langle X ::= x,\ Y ::= y,\ Z ::= z\rangle \in \Pi_7$ *folgt*

$$\langle X ::= z\texttt{bca}y\texttt{bca}x,\ Y ::= (y\texttt{bca}x\texttt{abc})^n y,\ Z ::= z\rangle \in \Pi_7.$$

Dann ist Π_7 *eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung* $\eta_7 \equiv X\,\texttt{abc}\,Y\,\texttt{abc}\,Z = Z\,\texttt{bca}\,Y\,\texttt{bca}\,X$.

Beweis: Wie betrachten nacheinander alle Regeln der Definition von Π_7 nach Proposition 3.19 und arbeiten gegebenenfalls die parametrischen Beschreibungen Π_3 bis Π_6 ein.
Regeln 1 und 2: Diese beiden Regeln werden unverändert aus Π_7 übernommen und ergeben die Regeln 1' und 2'.
Regel 3: Seien $s_1, s_2 \in \Sigma^*$ und $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_4)$. Dann gilt $\langle X ::= s_2,\ Y ::= (s_1\texttt{bca})^n s_1\texttt{bc},\ Z ::= s_2\texttt{abc}s_1\rangle \in \Pi_7$. Nach Proposition 3.16 lässt sich $\Gamma(\eta_4)$ durch Π_4 mit zwei Regeln beschreiben:
Regel 3 von Π_7, Regel 1 von Π_4: Es gilt $s_1 = \lambda$, $s_2 = \texttt{bc(abc)}^m$, somit gilt

$$\begin{aligned}(s_1\,\texttt{bca})^n\,s_1\,\texttt{bc} &= (\texttt{bca})^n\texttt{bc}\\ &= \texttt{bc(abc)}^n\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}s_2\,\texttt{abc}\,s_1 &= \texttt{bc(abc)}^m\,\texttt{abc}\\ &= \texttt{bc(abc)}^{m+1}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\langle X ::= \texttt{bc(abc)}^m,\ Y ::= \texttt{bc(abc)}^n,\ Z ::= \texttt{bc(abc)}^{m+1}\rangle \in \Pi_7.$$

Dies ist Regel 4'.
Regel 3 von Π_7, Regel 2 von Π_4: Es gilt $s_1 = \mathtt{bc}t_2$, $s_2 = t_1$ mit $\langle X ::= t_1,\, Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$. Daraus folgt

$$\langle X ::= t_1,\, Y ::= (\mathtt{bc}t_2\mathtt{bca})^n\mathtt{bc}t_2\mathtt{bc},\, Z ::= t_1\mathtt{abcbc}t_2\rangle \in \Pi_7$$

für alle $\langle X ::= t_1,\, Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$. So ensteht Regel 10'.
Regel 4: Seien $s_1, s_2 \in \Sigma^*$ und $\langle X ::= s_1,\, Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_3)$. Daraus folgt $\langle X ::= s_2\mathtt{bca}s_1,\, Y ::= (s_1\mathtt{abc})^n s_1\mathtt{a},\, Z ::= s_2\rangle \in \Pi_7$. Nach Proposition 3.15 lässt sich $\Gamma(\eta_3)$ durch Π_3 mit zwei Regeln beschreiben:
Regel 4 von Π_7, Regel 1 von Π_3: Es gilt $s_1 = \lambda$, $s_2 = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^m$. Daraus folgt

$$\langle X ::= \mathtt{a}(\mathtt{bca})^{m+1},\, Y ::= (\mathtt{abc})^n\mathtt{a},\, Z ::= \mathtt{a}(\mathtt{bca})^m\rangle \in \Pi_7.$$

Dies ist Regel 3'.
Regel 4 von Π_7, Regel 2 von Π_3: Es gilt $s_1 = \mathtt{a}t_1$, $s_2 = t_2$ mit $\langle X ::= t_1,\, Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} s_2\mathtt{bca}s_1 &= t_2\mathtt{bcaa}t_1 \\ &= t_1\mathtt{aabc}t_2. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\langle X ::= t_1\mathtt{aabc}t_2,\, Y ::= (\mathtt{a}t_1\mathtt{abc})^n\mathtt{a}t_1\mathtt{a},\, Z ::= t_2\rangle \in \Pi_7$$

für alle $\langle X ::= t_1,\, Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$; das ist Regel 9'.
Regel 5: Es gilt $\langle X ::= s_1,\, Y ::= (s_2\mathtt{abca})^n s_2,\, Z ::= s_1\mathtt{abc}s_2\mathtt{a}\rangle \in \Pi_7$ für alle $\langle X ::= s_1,\, Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_5)$. Nach Proposition 3.17 lässt sich $\Gamma(\eta_5)$ durch Π_5 mit drei Regeln beschreiben:
Regel 5 von Π_7, Regel 1 von Π_5: Es gilt $s_1 = \lambda$, $s_2 = (\mathtt{bc})^m$. Daraus folgt

$$\langle X ::= \lambda,\, Y ::= ((\mathtt{bc})^m\mathtt{abca})^n(\mathtt{bc})^m,\, Z ::= \mathtt{a}(\mathtt{bc})^{m+1}\mathtt{a}\rangle \in \Pi_7.$$

Dies ist Regel 5'.
Regel 5 von Π_7, Regel 2 von Π_5: Es gilt $s_1 = \mathtt{a}$, $s_2 = \mathtt{a}(\mathtt{bca})^m$. Daraus folgt

$$\langle X ::= \mathtt{a},\, Y ::= (\mathtt{a}(\mathtt{bca})^m\mathtt{abca})^n\mathtt{a}(\mathtt{bca})^m,\, Z ::= \mathtt{aa}(\mathtt{bca})^{m+1}\mathtt{a}\rangle \in \Pi_7.$$

Dies ist Regel 7'.
Regel 5 von Π_7, Regel 3 von Π_5: Es gilt $s_1 = \mathtt{a}t_1\mathtt{a}$, $s_2 = t_2$ mit $\langle X ::= t_1,\, Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$. Daraus folgt

$$\langle X ::= \mathtt{a}t_1\mathtt{a},\, Y ::= (t_2\mathtt{abca})^n t_2,\, Z ::= \mathtt{a}t_1\mathtt{aabc}t_2\mathtt{a}\rangle \in \Pi_7$$

für alle $\langle X ::= t_1,\, Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_1)$. Dies ist Regel 11'.
Regel 6: $\langle X ::= s_1\mathtt{bca}s_2\mathtt{bc},\, Y ::= (s_2\mathtt{bcabc})^n s_2,\, Z ::= s_1\rangle \in \Pi_7$ für alle $\langle X ::= s_1,\, Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_6)$. Nach Proposition 3.18 lässt sich $\Gamma(\eta_6))$ durch Π_6 anhand von drei Regeln beschreiben:
Regel 6 von Π_7, Regel 1 von Π_6: Es gilt $s_1 = \lambda$, $s_2 = \mathtt{a}^m$. Daraus folgt

$$\langle X ::= \mathtt{bca}^{m+1}\mathtt{bc},\, Y ::= (\mathtt{a}^m\mathtt{bcabc})^n\mathtt{a}^m,\, Z ::= \lambda\rangle \in \Pi_7.$$

Und das ist Regel 6'.
Regel 6 von Π_7, Regel 2 von Π_6: Es gilt $s_1 = \mathtt{bc}$, $s_2 = \mathtt{bc(abc)}^m$. Daraus folgt

$$\langle X ::= \mathtt{bcbc(abc)}^{m+1}\mathtt{bc},\ Y ::= (\mathtt{bc(abc)}^m\mathtt{bcabc})^n\mathtt{bc(abc)}^m,\ Z ::= \mathtt{bc}\rangle \in \Pi_7.$$

Das ist Regel 8'.
Regel 6 von Π_7, Regel 3 von Π_6 Es gilt $s_1 = \mathtt{bc}t_2\mathtt{bc}$, $s_2 = t_1$ mit $\langle X ::= t_1,\ Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$. Dann gilt

$$\langle X ::= \mathtt{bc}t_2\mathtt{bcbca}t_1\mathtt{bc},\ Y ::= (t_1\mathtt{bcabc})^n t_1,\ Z ::= \mathtt{bc}t_2\mathtt{bc}\rangle \in \Pi_7$$

für alle $\langle X ::= t_1,\ Y ::= t_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$. Dies ist Regel 12'.
Regeln 7 und 8: Auch diese Regeln werden unverändert übernommen, so entstehen die Regeln 13' und 14'. $\square$

Zugegeben, dieses Resultat ist nicht gerade schön, sondern eher monströs und unhandlich. Dafür zeigt es ziemlich deutlich, wie unüberschaubar, komplex und unanschaulich die Menge aller Lösungen einer harmlos wirkenden Gleichung wie $X\,\mathtt{abc}\,Y\,\mathtt{abc}\,Z = Z\,\mathtt{bca}\,Y\,\mathtt{bca}\,X$ doch sein kann. Angesichts dieser Einsicht verzichten wir darauf, die Nicht-Parametrisierbarkeit dieser Gleichung zu zeigen.

Bis hierhin gab es eine große Menge an ziemlich technischen Beweisen für nicht gerade weltbewegende Resultate. Das nächste Ergebnis ist auch nicht gerade spannend und alles andere als natürlich, dafür wird es aber der die Hauptarbeit für den Beweis des Hauptresultates dieser Arbeit liefern. Außerdem ist der dazu gehörende Beweis der vorletzte in dieser Arbeit und noch dazu der letzte Beweis, der eine lange, technische und in beiderlei Sinne erschöpfende Fallunterscheidung erfordert.

Lemma 3.21 *Sei Π_8 wie folgt definiert:*

1. $\langle W ::= (\mathtt{abc})^m\mathtt{a},\ X ::= \lambda,\ Y ::= \mathtt{bc(abc)}^n,\ Z ::= \lambda\rangle \in \Pi_8$,
2. $\langle W ::= (\mathtt{a}s_2\mathtt{abc})^n\mathtt{a}s_2\mathtt{a},\ X ::= s_2\mathtt{a},\ Y ::= s_1,\ Z ::= \mathtt{a}s_2\rangle \in \Pi_8$ *für alle* $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_5)$,
3. $\langle W ::= (s_2\mathtt{bcabc})^n s_2,\ X ::= \mathtt{bc}s_2,\ Y ::= s_1,\ Z ::= s_2\mathtt{bc}\rangle \in \Pi_8$ *für alle* $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_2)$,
4. $\langle W ::= (s_3\mathtt{bca}s_2\mathtt{abc})^n s_3,\ X ::= s_2\mathtt{abc}s_3,\ Y ::= s_1,\ Z ::= s_3\mathtt{bca}s_2\rangle \in \Pi_8$ *für alle* $\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2,\ Z ::= s_3\rangle \in \Gamma(\eta_7)$.

Dann ist Π_8 eine parametrische Beschreibung aller Lösungen der Gleichung $\eta_8 \equiv W\,\mathtt{bca}\,X\,Y\,\mathtt{abc}\,X = Z\,\mathtt{abc}\,W\,Z\,\mathtt{bca}\,Y$.

Beweis: Zu zeigen sind Vollständigkeit und Korrektheit von Π_8.
Vollständigkeit: Seien $w, x, y, z \in \Sigma^*$ mit $w\,\mathtt{bca}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = z\,\mathtt{abc}\,w\,z\,\mathtt{bca}\,y$.

Angenommen, es gilt $|w| > |z| + 2$. Dann existiert ein $w' \in \Sigma^*$ mit $w = z\texttt{abc}w'$ und es gilt

$$\begin{aligned}
& \underline{w}\ \texttt{bca}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = z\ \texttt{abc}\ \underline{w}\ z\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & \underline{z\texttt{abc}}w'\ \texttt{bca}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = \underline{z\ \texttt{abc}}\ z\texttt{abc}w'\ z\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & w'\ \texttt{bca}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = z\ \texttt{abc}w'\ z\ \texttt{bca}\, y.
\end{aligned}$$

Diese Ersetzung lässt sich nun wiederholt durchführen; also existieren ein $w'' \in \Sigma^*$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}_1$ mit $w = (z\texttt{abc}^{n_1})\, w''$ und $|w''| \le |z| + 2$. Es lassen sich also ein $w_1 \in \Sigma^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass $|w_1| \le |z| + 2$ und $w = (z\texttt{abc})^n w_1$. Außerdem gilt dann

$$w_1\ \texttt{bca}\, x\, y\, \texttt{abc}\ = z\ \texttt{abc}\ w_1\ z\ \texttt{bca}\, y.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $|w_1| = |z| + 1$ (Fall 1) und $|w_1| < |z|$ (Fall 2). Weiterhin behalten wir im Hinterkopf, dass in allen Fällen $|x| = |z|$ gelten muss (dies ergibt sich direkt aus Vergleich der Längen der beiden Gleichungsteile).
Fall 1: Aus $|w_1| = |z| + 1$ folgt $w_1 = z\texttt{a}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& w_1\ \texttt{bca}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = z\ \texttt{abc}\ w_1\ z\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & z\texttt{a}\ \texttt{bca}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = z\ \texttt{abc}\ z\texttt{a}\ z\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & \texttt{a}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = z\texttt{a}\ z\ \texttt{bca}\, y.
\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, nämlich $|z| = 0$ (Fall 1.1) und $|z| > 0$ (Fall 1.2).
Fall 1.1: Gilt $z = \lambda$, so folgt daraus $x = \lambda$ und somit

$$\begin{aligned}
& \texttt{a}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = z\texttt{a}\ z\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & \texttt{a}\, y\, \texttt{abc} = \texttt{a}\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & y\, \texttt{abc} = \texttt{bca}\, y.
\end{aligned}$$

Somit gilt nach Lemma 2.9 $y = \texttt{bc}(\texttt{abc})^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Da $w = (z\texttt{abc})^m w_1 = (\texttt{abc})^m\texttt{a} = (\texttt{abc})^m\texttt{a}$ lässt sich leicht erkennen, dass Lösungen, auf die dieser Fall zutrifft, von Regel 1 abgedeckt werden.
Fall 1.2: Gilt $|z| > 0$, so existiert ein $z_1 \in \Sigma^*$ mit $z = \texttt{a}z_1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \texttt{a}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = z\ \texttt{a}\ z\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & \texttt{a}\, x\, y\, \texttt{abc}\, x = \texttt{a}z_1\ \texttt{a}\ \texttt{a}z_1\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & x\, y\, \texttt{abc}\, x = z_1\ \texttt{aa}\ z_1\ \texttt{bca}\, y.
\end{aligned}$$

Da $|x| = |z| = |z_1| + 1$ gilt $x = z_1\texttt{a}$, also gilt

$$\begin{aligned}
& x\, y\, \texttt{abc}\, x = z_1\ \texttt{aa}\ z_1\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & z_1\texttt{a}\, y\, \texttt{abc}\, z_1\texttt{a} = z_1\ \texttt{aa}\ z_1\ \texttt{bca}\, y \\
\Leftrightarrow\quad & y\, \texttt{abc}\, z_1\texttt{a} = \texttt{a}\ z_1\ \texttt{bca}\, y.
\end{aligned}$$

Also gilt $\langle X ::= y,\ Y ::= z_1 \rangle \in \Gamma(\eta_5)$ und $w = (z\mathtt{abc})^n w_1 = (z\mathtt{abc})^n z\mathtt{a} = (\mathtt{a}z_1\mathtt{abc})^n \mathtt{a}z_1\mathtt{a}$. Ein Fall für Regel 2.
Fall 2: Da $|z| > |w_1|$, so folgt direkt $|z| \geq |w_1\mathtt{bc}|$, da sonst durch ein Widerspruch zu $\mathtt{a} \neq \mathtt{c}$ entstünde. Also existiert ein $z_1 \in \Sigma^*$ mit $z = w_1\mathtt{bc}z_1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & w_1\,\mathtt{bca}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = z\,\mathtt{abc}\,w_1\,z\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & w_1\,\mathtt{bca}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = w_1\mathtt{bc}z_1\,\mathtt{abc}\,w_1\,w_1\mathtt{bc}z_1\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{a}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = z_1\,\mathtt{abc}\,w_1\,w_1\mathtt{bc}z_1\,\mathtt{bca}\,y. \end{aligned}$$

Wieder einmal unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich $|z_1| = 0$ (Fall 2.1) und $|z_1| > 0$ (Fall 2.2).
Fall 2.1: Gilt $|z_1| = 0$, so folgt daraus

$$\begin{aligned} & \mathtt{a}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = z_1\,\mathtt{abc}\,w_1\,w_1\mathtt{bc}\,z_1\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{a}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = \mathtt{abc}\,w_1\,w_1\mathtt{bc}\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & x\,y\,\mathtt{abc}\,x = \mathtt{bc}\,w_1\,w_1\mathtt{bc}\,\mathtt{bca}\,y. \end{aligned}$$

Außerdem gilt $|x| = |z| = |w_1\mathtt{bc}z_1| = |w_1\mathtt{bc}| = |w_1| + 2$ und somit $x = \mathtt{bc}w_1$. Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} & x\,y\,\mathtt{abc}\,x = \mathtt{bc}\,w_1\,w_1\mathtt{bcbca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{bc}w_1\,y\,\mathtt{abc}\,\mathtt{bc}w_1 = \mathtt{bc}\,w_1\,w_1\mathtt{bcbca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & y\,\mathtt{abcbc}\,w_1 = w_1\,\mathtt{bcbca}\,y. \end{aligned}$$

Also gilt $\langle X ::= y,\ Y ::= w_1 \rangle \in \Gamma(\eta_2)$, $w = (z\mathtt{abc})^n w_1 = (w_1\mathtt{bcabc})^n w_1$, $x = \mathtt{bc}w_1$, $z = w_1\mathtt{bc}$. Lösungen dieser Form werden von Regel 3 erzeugt.
Fall 2.2: Gilt $|z_1| > 0$, so existiert ein $z_2 \in \Sigma^*$ mit $z_1 = \mathtt{a}z_2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \mathtt{a}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = z_1\,\mathtt{abc}\,w_1\,w_1\,\mathtt{bc}\,z_1\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & \mathtt{a}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x = \mathtt{a}z_2\,\mathtt{abc}\,w_1\,w_1\,\mathtt{bc}\,\mathtt{a}z_2\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & x\,y\,\mathtt{abc}\,x = z_2\,\mathtt{abc}\,w_1\,w_1\,\mathtt{bca}z_2\,\mathtt{bca}\,y. \end{aligned}$$

Da $|x| = |z| = |w_1\mathtt{bc}z_1| = |w_1\mathtt{bca}z_2|$ gilt $x = z_2\mathtt{abc}w_1$ und somit

$$\begin{aligned} & x\,y\,\mathtt{abc}\,x = z_2\,\mathtt{abc}\,w_1\,w_1\,\mathtt{bca}z_2\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & \underline{z_2\mathtt{abc}w_1}\,y\,\mathtt{abc}\,z_2\mathtt{abc}w_1 = \underline{z_2\,\mathtt{abc}\,w_1}\,w_1\,\mathtt{bca}z_2\,\mathtt{bca}\,y \\ \Leftrightarrow\quad & y\,\mathtt{abc}\,z_2\,\mathtt{abc}\,w_1 = w_1\,\mathtt{bca}\,z_2\,\mathtt{bca}\,y. \end{aligned}$$

Somit gilt $\langle X ::= y,\ Y ::= z_2,\ Z ::= w_1 \rangle \in \Gamma(\eta_7)$ und $w = (z\mathtt{abc})^n w_1 = (w_1\mathtt{bca}z_2\mathtt{abc})^n w_1$, $x = z_2\mathtt{abc}w_1$ und $z = w_1\mathtt{bca}z_2$. Dafür haben wir Regel 4.

Korrektheit: Hier benötigen wir keinerlei Induktion oder ähnliches, wir erledigen einfach eine Regel nach der anderen.
Regel 1: Sei $w = (\mathtt{abc})^m\mathtt{a}$, $y = \mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n$, $x = z = \lambda$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} w\,\mathtt{bca}\,x\,y\,\mathtt{abc}\,x &= (\mathtt{abc})^m\mathtt{a}\,\mathtt{bca}\,\mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n\,\mathtt{abc} \\ &= \underline{\lambda}\,\mathtt{abc}\,\underline{(\mathtt{abc})^m\mathtt{a}}\,\underline{\lambda}\,\mathtt{bca}\,\underline{\mathtt{bc}(\mathtt{abc})^n} \\ &= z\,\mathtt{abc}\,w\,z\,\mathtt{bca}\,y. \end{aligned}$$

Regel 2: Seien $s_1, s_2 \in \Sigma^*$ mit

$$\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_5), \tag{12}$$

$w = (\mathtt{a}s_2\mathtt{abc})^n\mathtt{a}s_2\mathtt{a}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $x = s_2\mathtt{a}$, $y = s_1$ und $z = \mathtt{a}s_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
w\ \mathtt{bca}\ x\ y\ \mathtt{abc}\ x &= \underline{(\mathtt{a}s_2\mathtt{abc})^n\mathtt{a}s_2\mathtt{a}\ \mathtt{bc}}\mathtt{a}\ s_2\mathtt{a}\ s_1\ \mathtt{abc}\ s_2\mathtt{a} \\
&= \mathtt{a}s_2\mathtt{abc}(\mathtt{a}s_2\mathtt{abc})^n\ \mathtt{a}s_2\mathtt{a}\underline{s_1\mathtt{abc}s_2\mathtt{a}} \\
&= \underline{\mathtt{a}s_2}\mathtt{abc}(\mathtt{a}s_2\mathtt{abc})^n\mathtt{a}s_2\mathtt{a}\ \underline{\mathtt{a}s_2}\mathtt{bca}\underline{s_1} && \text{(wegen (12))} \\
&= z\ \mathtt{abc}\underline{(\mathtt{a}s_2\mathtt{abc})^n\mathtt{a}s_2\mathtt{a}}\ z\ \mathtt{bca}\ y \\
&= z\ \mathtt{abc}\ w\ z\ \mathtt{bca}\ y.
\end{aligned}$$

Regel 3: Seien $s_1, s_2 \in \Sigma^*$ mit

$$\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2\rangle \in \Gamma(\eta_2), \tag{13}$$

$w = (s_2\mathtt{bcabc})^n s_2$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $x = \mathtt{bc}s_2$, $y = s_1$ und $z = s_2\mathtt{bc}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
w\ \mathtt{bca}\ x\ y\ \mathtt{abc}\ x &= \underline{(s_2\mathtt{bcabc})^n s_2\ \mathtt{bca}\ \mathtt{bc}}s_2\ s_1\ \mathtt{abc}\ \mathtt{bc}s_2 \\
&= s_2\mathtt{bcabc}(s_2\mathtt{bcabc})^n\ s_2\underline{s_1\mathtt{abcbc}s_2} \\
&= \underline{s_2\mathtt{bc}}\mathtt{abc}(s_2\mathtt{bcabc})^n s_2\ \underline{s_2\mathtt{bc}}\mathtt{bca}\underline{s_1} && \text{(wegen (13))} \\
&= z\ \mathtt{abc}\ \underline{(s_2\mathtt{bcabc})^n s_2}\ z\ \mathtt{bca}\ y \\
&= z\ \mathtt{abc}\ w\ z\ \mathtt{bca}\ y.
\end{aligned}$$

Regel 4: Seien $s_1, s_2, s_3 \in \Sigma^*$ mit

$$\langle X ::= s_1,\ Y ::= s_2,\ Z ::= s_3\rangle \in \Gamma(\eta_7), \tag{14}$$

$w = (s_3\mathtt{bca}s_2\mathtt{abc})^n s_3$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $x = s_2\mathtt{abc}s_3$, $y = s_1$, $z = s_3\mathtt{bca}s_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
w\ \mathtt{bca}\ x\ y\ \mathtt{abc}\ x &= \underline{(s_3\mathtt{bca}s_2\mathtt{abc})^n s_3\ \mathtt{bca}\ s_2\mathtt{abc}}s_3\ s_1\ \mathtt{abc}\ s_2\mathtt{abc}s_3 \\
&= s_3\mathtt{bca}s_2\mathtt{abc}(s_3\mathtt{bca}s_2\mathtt{abc})^n\ s_3\underline{s_1\mathtt{abc}s_2\mathtt{abc}s_3} \\
&= \underline{s_3\mathtt{bca}s_2}\mathtt{abc}(s_3\mathtt{bca}s_2\mathtt{abc})^n s_3\ \underline{s_3\mathtt{bca}s_2}\mathtt{bca}\underline{s_1} && \text{(wegen (14))} \\
&= z\ \mathtt{abc}\ \underline{(s_3\mathtt{bca}s_2\mathtt{abc})^n s_3}\ z\ \mathtt{bca}\ y \\
&= z\ \mathtt{abc}\ w\ z\ \mathtt{bca}\ y.
\end{aligned}$$

Π_8 beschreibt also vollständig und korrekt alle Lösungen von η_8. $\square$

Nun haben wir es fast geschafft – im nächsten Abschnitt folgt endlich die lange versprochene Charakterisierung aller zweideutigen Wörter aus $L_{NE}(\mathrm{Mau})$. Der geneigte Leser möge bitte weiterlesen, nur noch ein einziger Beweis, und der ist weniger technisch als so mancher vorangehende. Und außerdem kürzer und frei von Fallunterscheidungen.

4 Alle zweideutigen Wörter in $L_{NE}(\mathrm{Mau})$

Sei $\mathrm{Mau} = X\,\mathtt{ab}\,X\,\mathtt{bca}\,Y\,\mathtt{abc}\,Y$; laut [MS94] ist Mau zweideutig. Allerdings existieren unendlich viele $w \in L_{NE}(\mathrm{Mau})$, die auf Mau eindeutig sind – zum Beispiel gilt dies für alle $w = \sigma(\mathrm{Mau})$ mit $|\sigma(X)|_{\mathtt{c}} = |\sigma(Y)|_{\mathtt{c}} = 0$. Im Folgenden soll nun eine Charakterisierung aller zweideutigen Wörter über Mau gefunden werden.

Die bisherigen Resultate lassen bereits erahnen, dass diese Charakterisierung nicht unbedingt ästhetisch, anschaulich oder besonders elegant sein wird; allerdings ist der Beweis dank der Vorbereitungen der letzten gut 40 Seiten recht kurz.

Satz 4.1 *Ein Wort $w \in L_{NE}(\mathrm{Mau})$ ist genau dann zweideutig auf* Mau*, wenn Substitutionen σ_1, σ_2 existieren, so dass*

$$w = \sigma_1(\mathrm{Mau}) = \sigma_2(\mathrm{Mau})$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_1(X) &= \mathtt{c}w_1, & \sigma_1(Y) &= w_2\mathtt{abc}w_3,\\ \sigma_2(X) &= \mathtt{c}w_1\mathtt{abc}w_2, & \sigma_2(Y) &= w_3 \end{aligned}$$

mit $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{bc}\}^*$, so dass

$$\langle W ::= w_1,\ X ::= w_2,\ Y ::= w_3,\ Z ::= w_4\rangle \in \Gamma(\eta_8).$$

Beweis: Sei $w \in L_{NE}(\mathrm{Mau})$ also ein zweideutiges Wort über Mau. Dann existieren zwei Substitutionen σ_1, σ_2 und Wörter $x, x', y', y \in \Sigma^*$ mit $\sigma_1(X) = x$, $\sigma_1(Y) = y'$, $\sigma_2(X) = x'$ und $\sigma_2(Y) = y$ und es gilt

$$\begin{aligned} w &= x\,\mathtt{ab}\,x\,\mathtt{bca}\,y'\,\mathtt{abc}\,y' \\ &= x'\,\mathtt{ab}\,x'\,\mathtt{bca}\,y\,\mathtt{abc}\,y \end{aligned} \tag{15}$$

und $x \neq x', y' \neq y$. Offensichtlich gilt $|x| \neq |x'|$, o.B.d.A. sei $|x| < |x'|$ und somit $|y'| > |y|$. Die längere Substitution einer Variable sei also jeweils die mit dem Apostrophen, daher das vorkommen von apostrophierten und unapostrophierten Wörtern in einer Substitution anstelle eines einfachen $\sigma_1(X) = x$, $\sigma_1(Y) = y$. Im Grunde ist das aber egal, wir werden nun nämlich Ausnutzen, dass die apostrophierten Wörter jeweils ihr unapostrophiertes Gegenstück enthalten. Es existieren also $x_1, y_1 \in \Sigma^+$ mit

$$x' = xx_1, \tag{16}$$

$$y' = y_1y. \tag{17}$$

Wegen $x_1, y_1 \neq \lambda$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &x\,\mathtt{ab}\,x\,\mathtt{bca}\,y_1y\,\mathtt{abc}\,y_1y \\ &= xx_1\,\mathtt{ab}\,xx_1\ \ \mathtt{bca}\ \ y\,\mathtt{abc}\,y. \end{aligned} \tag{18}$$

Dies verkürzt sich durch Entfernen des gemeinsamen Präfix x bzw. des gemeinsamen Suffix y zu

$$\begin{aligned}&\texttt{ab}\,x\,\texttt{bca}\,y_1 y\,\texttt{abc}\,y_1 \\ &= x_1\,\texttt{ab}\,x x_1\,\texttt{bca}\,y\,\texttt{abc}.\end{aligned} \tag{19}$$

Da $x_1, y_1 \neq \lambda$ existieren $x_2, y_2 \in \Sigma^*$ mit

$$x_1 = \texttt{ab}\,x_2, \tag{20}$$

$$y_1 = y_2\,\texttt{abc}. \tag{21}$$

Durch Einsetzen von (20) und (21) in (19) ergibt sich

$$\begin{aligned}&\underline{\texttt{ab}}\,x\,\texttt{bca}\,y_2\,\texttt{abc}\,y\,\texttt{abc}\,y_2\,\underline{\texttt{abc}} \\ &= \underline{\texttt{ab}}\,x_2\,\texttt{ab}\,x\,\texttt{ab}\,x_2\,\texttt{bca}\,y\,\underline{\texttt{abc}}.\end{aligned} \tag{22}$$

Durch Entfernen des gemeinsamen Präfix `ab` und des gemeinsamen Suffix `abc` ergibt sich

$$\begin{aligned}&\underline{x\,\texttt{bca}\,y_2}\,\texttt{abc}\,\underline{y\,\texttt{abc}\,y_2} \\ &= \underline{x_2\,\texttt{ab}\,x}\,\texttt{ab}\,\underline{x_2\,\texttt{bca}\,y}.\end{aligned} \tag{23}$$

Durch Vergleich der Längen der beiden Gleichungsteile von (23) erhält man $|x| + |y| + 2|y_2| + 9 = |x| + |y| + 2|x_2| + 7$, also $|y_2| + 1 = |x_2|$. Betrachtet man nun in beiden Teilen der (23) das Präfix der Länge $|x| + |y_2| + 3 = |x| + |x_2| + 2$ ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned}&x\,\texttt{bca}\,y_2 \\ &= x_2\,\texttt{ab}\,x.\end{aligned} \tag{24}$$

Aus dem Suffix der Länge $|y| + |y_2| + 4 = |y| + |x_2| + 3$ erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}&\texttt{c}\,y\,\texttt{abc}\,y_2 \\ &= x_2\,\texttt{bca}\,y.\end{aligned} \tag{25}$$

Wie leicht zu sehen ist gilt nun $x_2 \neq \lambda$, also existiert ein $x_3 \in \Sigma^*$ mit

$$x_2 = \texttt{c}\,x_3. \tag{26}$$

Dadurch gilt mit (25)

$$\begin{aligned}&y\,\texttt{abc}\,y_2 \\ &= x_3\,\texttt{bca}\,y.\end{aligned} \tag{27}$$

Außerdem präzisiert sich (24) zu

$$\begin{aligned}&x\,\texttt{bca}\,y_2 \\ &= \texttt{c}\,x_3\,\texttt{ab}\,x.\end{aligned} \tag{28}$$

Es gilt also $x \neq \lambda$, daher existiert ein $x_4 \in \Sigma^*$ mit

$$x = \mathtt{c}\, x_4. \tag{29}$$

Daher folgt durch Einsetzen von (29) in (28) und Entfernen des gemeinsamen Präfix c schließlich

$$\begin{aligned} & x_4\, \mathtt{bca}\, y_2 \\ =\, & x_3\, \mathtt{abc}\, x_4. \end{aligned} \tag{30}$$

Nun fügen wir die linken (bzw., in dieser Schreibweise oberen) Hälften der (30) und (27) aneinander und wenden nacheinander die genannten Gleichungen an:

$$\begin{aligned} & \underline{x_4\, \mathtt{bca}\, y_2}\; y\, \mathtt{abc}\, y_2 & \\ =\, & x_3\, \mathtt{abc}\, x_4\, \underline{y\, \mathtt{abc}\, y_2} & \text{(nach (29))} \\ =\, & x_3\, \mathtt{abc}\, x_4\, x_3\, \mathtt{bca}\, y. & \text{(nach (29))} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & x_4\, \mathtt{bca}\, y_2\, y\, \mathtt{abc}\, y_2 \\ =\, & x_3\, \mathtt{abc}\, x_4\, x_3\, \mathtt{bca}\, y. \end{aligned}$$

In der Tat, das ist eine Gleichung der Form η_8 und der Grund für all die Lemmata und Propositionen der vorherigen Kapitel (Um es ganz deutlich zu machen: Ersetzt man x_4 durch W, y_2 durch X, y durch Y und x_3 durch Z, so erhält man η_8). Es gilt also $\langle W ::= x_4, X ::= y_2, Y ::= y, Z ::= x_3\rangle \in \Gamma(\eta_8)$; diese Menge wird nach Lemma 3.21 von Π_8 beschrieben. Dabei gilt

$$\begin{aligned} x &= \mathtt{c}\, x_4, & \text{(nach (29))} \\ y' &= y_1 y & \text{(nach (17))} \\ &= y_2\, \mathtt{abc}\, y, & \text{(nach (21))} \\ x' &= x x_1 & \text{(nach (16))} \\ &= x\, \mathtt{ab}\, x_2 & \text{(nach (20))} \\ &= x\, \mathtt{abc}\, x_3 & \text{(nach (26))} \\ &= \mathtt{c}\, x_4\, \mathtt{abc}\, x_3. & \text{(nach (29))} \end{aligned}$$

Es gilt also $\sigma_1(X) = \mathtt{c}x_4$ und $\sigma_1(Y) = y_2\mathtt{abc}y$ sowie $\sigma_2(X) = \mathtt{c}x_4\mathtt{abc}x_3$ und $\sigma_2(Y) = y$. Natürlich folgt aus all diesen Überlegungen auch die Gültigkeit der Behauptung in der umgekehrten Richtung. □

Anhand von $\Pi_{\{1,2,7,8\}}$ lassen sich nun (sogar berechenbar) alle auf α zweideutigen Wörter konstruieren; die Problematik lässt vermuten, dass dieses Problem nicht signifikant einfacher zu lösen ist.

Übrigens lässt sich aus Satz 4.1 sowie den Lemmata 3.12, 3.14 und 3.21 direkt Folgendes schließen:

Korollar 4.2 *Sei* $w \in L_{NE}(\mathrm{Mau})$ *zweideutig auf* Mau. *Dann gilt*

$$w \in \mathtt{c}\,\{\mathtt{a}, \mathtt{bc}\}^*\,,$$

selbst wenn das verwendete Terminalalphabet mehr als drei Buchstaben hat.

5 Schlussbetrachtungen

Wie wir im vorigen Abschnitt erfahren haben, erzeugt das in [MS94] eingeführte Pattern $\mathrm{Mau} = X\,\mathtt{ab}\,X\,\mathtt{bca}\,Y\,\mathtt{abc}\,Y$ also unendlich viele verschiedene zweideutige Wörter. Tatsächlich sind es sogar nicht nur unendlich viele mehrdeutige Wörter, sondern unendlich viele Wörter, für die sich keine endliche Zahl allgemeiner Strukturen finden lässt. Dennoch bestehen alle diese Wörter einzig und alleine aus den Buchstaben $\mathtt{a}$, $\mathtt{b}$ und $\mathtt{c}$, selbst wenn Σ unendlich viele Buchstaben enthält. Gleiches gilt für alle in dieser Arbeit betrachteten nicht-parametrisierbaren Gleichungen. Allgemein stellt sich dabei die Frage, ob eine nicht-parametrisierbare nicht-terminalfreie Wortgleichung existiert, so dass eine parametrische Beschreibung der Lösungen dieser Gleichung Wortparameter enthält.

Ein Nachteil des in dieser Arbeit verfolgten Ansatzes zur Bestimmung aller auf einem Pattern zweideutigen Wörter ist, dass er sich schlecht auf ‚kompliziertere' Pattern erweitern lässt. Steigt die Zahl der Variablen, so sind deutlich mehr Gleichungen zu betrachten oder gar Systeme von Gleichungen zu lösen; die hier vorgestellten Gleichungen sollten einen Eindruck vermitteln, wie technisch und aufwändig ein solches Vorgehen werden kann.

Auch die in [MS94], Lemma 9 erwähnte allgemeinere Form vom Mau ist mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Ansatz deutlich aufwändiger zu betrachten; ganz zu schweigen von dem dort vorgestellten 3-deutigen Pattern. Gegebenenfalls könnte sogar, wie am Ende von 3.1 erwähnt wurde, die grundsätzliche Vorgehensweise beim Lösen der Gleichungen versagen.

Wer vor dem Lesen dieser Arbeit noch nicht genau wusste, warum es außer [MS94] keine Resultate zur endlichen Mehrdeutigkeit von Pattern gibt, sollte einen gewissen Eindruck bekommen haben, warum diese Fragestellung so schwer zu bearbeiten ist. Möglicherweise sind neue, weitgehende Resultate auf dem Gebiet endlich mehrdeutiger Pattern nur in Verbindung mit tiefgehenden Einsichten im Zusammenhang mit der noch langsam wachsenden Theorie der Wortgleichungen und Wortgleichungssystem zu erreichen.

Literatur

[Ang80a] Dana Angluin. Finding patterns common to a set of strings. *Journal of Computer and System Sciences*, 21:46–62, 1980.

[Ang80b] Dana Angluin. Inductive inference of formal languages from positive data. *Information and Control*, 45:117–135, 1980.

[Cho83] Christian Choffrut. *Equations in Words*, pages 164–185. In *Encyclopedia of Mathematics 17* [Lot83], 1983.

[CK97] Christian Choffrut and Juhani Karhumäki. Combinatorics on words. In *Handbook of Formal Languages* [RS97], pages 329–438.

[Die02] Volker Diekert. *Makanin's Algorithm*, pages 387–442. Encyclopedia of Mathematics 90. Cambridge Mathematical Library, Cambridge, 2002.

[FRS05] Dominik D. Freydenberger, Daniel Reidenbach, and Johannes C. Schneider. Unambiguous morphic images of strings. In Clelia de Felice and Antonio Restivo, editors, *Proceedings of DLT '05*, volume 3572 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 248–259. Springer, 2005.

[Gut98] Claudio Gutiérrez. Solving equations in strings: On makanin's algorithm. In Claudio L. Lucchesi and Arnaldo V. Moura, editors, *Proceedings of LATIN '98*, volume 1380 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 358–373. Springer, 1998.

[HK97] Tero Harju and Juhani Karhumäki. Morphisms. In *Handbook of Formal Languages* [RS97], pages 439–510.

[Hme76] Juri I. Hmelevskiĭ. *Equations in free semigroups*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1976. Translated by G. A. Kandall from the Russian original: Trudy Mat. Inst. Steklov. 107, 1971, 1-270.

[IP00] Lucian Ilie and Wojciech Plandowski. Two-variable word equations. In Horst Reichel and Sophie Tison, editors, *Proceedings of STACS '00*, volume 1770 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 122–132. Springer, 2000.

[Kar83] Juhani Karhumäki. On cube-free ω-words generated by binary morphisms. *Discrete Applied Mathematics*, 5:279–297, 1983.

[Kar04] Juhani Karhumäki. Combinatorics on words: A challenging topic. Technical report 645, Turku Center for Computer Science, 2004.

[KB03] Juhani Karhumäki and Jean Berstel. Combinatorics on words – a tutorial. *Bulletin of the EATCS*, 79:178–229, 2003.

[KP03] Juhani Karhumäki and Elena Petre. On some special equations on words. Technical report 583, Turku Center for Computer Science, 2003.

[Lot83] Monsieur Lothaire. *Combinatorics on Words*. Encyclopedia of Mathematics 17. Cambridge Mathematical Library, Cambridge, 1983.

[LP95] Marjo Lipponen and Gheorghe Păun. Strongly prime PCP words. *Discrete Applied Mathematics*, 63:193–197, 1995.

[LW91] Steffen Lange and Rolf Wiehagen. Polynomial-time inference of arbitrary pattern languages. *New Generation Computing*, 8:361–370, 1991.

[Mak77] Gennady S. Makanin. The problem of solvability of equations in a free semigroup. *Matematiceskij Sbornik*, 103:148–236, 1977.

[MS94] Alexandru Mateescu and Arto Salomaa. Finite degrees of ambiguity in pattern languages. *RAIRO Theoretical Informatics and Applications*, 28:233–253, 1994.

[MS97] Alexandru Mateescu and Arto Salomaa. Aspects of classical language theory. In *Handbook of Formal Languages* [RS97], chapter Patterns, pages 230–242.

[Per83] Dominique Perrin. *Words*, pages 1–17. In *Encyclopedia of Mathematics 17* [Lot83], 1983.

[Pet04] Elena Petre. An elementary proof for the non-parametrizability of the equation $xyz = zvx$. In Jirí Fiala, Václav Koubek, and Jan Kratochvíl, editors, *Proceedings of MFCS '04*, volume 3153 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 807–817. Springer, 2004.

[Rei04a] Daniel Reidenbach. A discontinuity in pattern inference. In Volker Diekert and Michel Habib, editors, *Proceedings of STACS '04*, volume 2996 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 129–140. Springer, 2004.

[Rei04b] Daniel Reidenbach. On the learnability of e-pattern languages over small alphabets. In John Shawe-Taylor and Yoram Singer, editors, *Proceedings of COLT '04*, volume 3120 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, pages 140–154. Springer, 2004.

[RS97] Grzegorz Rozenberg and Arto Salomaa. *Handbook of Formal Languages*. Springer, Secaucus, NJ, USA, 1997.

[Sal04] Kai Salomaa. Patterns. Formal Languages and Applications: Studies in Fuzziness and Soft Computing 148, pages 367–379. Springer, Berlin, 2004.

[Sch92] Klaus U. Schulz, editor. *Proceedings of IWWERT '90*, volume 572 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1992.

[Shi82] Takeshi Shinohara. Polynomial time inference of extended regular pattern languages. In Eiichi Goto, Koichi Furukawa, Reiji Nakajima, Ikuo Nakata, and Akinori Yonezawa, editors, *RIMS Symposium on Software Science and Engineering*, volume 147 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 115–127. Springer, 1982.

[Wei04] C. M. Weinbaum. Word equation $ABC = CDA, B \neq D$. *Pacific Journal of Mathematics*, 213:157–162, 2004.